

# Der optische Stark-Effekt mit quantisiertem Strahlungsfeld

## D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum naturalium  
(dr. rer. nat.)  
im Fach Physik

eingereicht an der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I  
Humboldt-Universität zu Berlin

von  
Herrn Dipl.-Phys. Torsten Altevogt  
geboren am 14.12.1968 in Osnabrück

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:  
Prof. Dr. Dr. h.c. H. Meyer

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I:  
Prof. Dr. J. P. Rabe

Gutachter:

1. Prof. Dr. Klaus Henneberger
2. Prof. Dr. Harry Paul
3. Prof. Dr. Roland Zimmermann

eingereicht am: 2. November 1999  
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 2000

## Abstract

The theoretical description of spectroscopic experiments usually relies on a semiclassical approach where the matter system is described in terms of quantum mechanics while the radiation field is treated classically. This approach does not work well for systems with a strong coupling between the matter system and photons of the radiation field. The latter can be the case within an optical resonator. In this thesis, additional effects of a quantized radiation field are investigated on a pump-probe experiment for detecting the optical Stark effect. One significant effect is that the lineshape of the shifted resonance displays the photon statistics of the pump field. For small pump detuning probe gain results in a frequency regime where the semiclassical treatment predicts absorption. This effect is referred to as nonclassical gain. For larger ensembles of two-level systems, additional substructures and resonances appear within the probe absorption spectrum. Also non-diagonal elements of the field density matrix can be detected in such an experiment. In order to describe a more complex matter systems, the optical Stark effect has been treated in terms of a density matrix approach with quantized radiation fields. For a quantitative description of nonclassical gain, higher correlation terms had to be treated properly. Moreover, conserved quantities were taken into account in approximate decouplings. The density matrix approach was applied to the description of the optical Stark effect on impurity-bound excitons in semiconductors. These systems are of high interest as their narrow resonances might allow the demonstration of fine effects of the quantized radiation field.

## Keywords:

quantized radiation field, nonclassical gain, density matrix theory on many-particle systems, quantum optics

## **Zusammenfassung**

Bei der theoretischen Beschreibung von spektroskopischen Experimenten wird in der Regel das Materiesystem quantenmechanisch beschrieben, während das Strahlungsfeld klassisch behandelt wird. Diese semiklassische Näherung ist zur Beschreibung von Experimenten, bei denen eine starke Kopplung zwischen dem Materiesystem und einzelnen Photonen besteht, nicht mehr gültig. Dies kann beispielsweise innerhalb eines optischen Resonators der Fall sein. In dieser Arbeit wird am Beispiel eines Pump-Test-Experiments zum Nachweis des optischen Stark-Effekts untersucht, welche zusätzlichen Effekte sich bei einer quantisierten Beschreibung des Strahlungsfeldes ergeben. Ein signifikanter Effekt ist, daß die Photonenstatistik des Pumpfeldes sich in der Linienform der verschobenen Resonanzlinie widerspiegelt. Weiter wurde in dieser Arbeit bei kleiner Pumpverstimmung ein Verstärkungseffekt gefunden, der ebenfalls auf der quantisierten Behandlung des Strahlungsfeldes beruht (nichtklassische Verstärkung). Es treten ferner bei größeren Ensembles von Zwei-Niveau-Systemen zusätzliche Unterstrukturen und Resonanzen auf. Auch kann der Nachweis des optischen Stark-Effekts Aufschluß über die Nichtdiagonalelemente bezüglich der Photonenzahl des quantisierten Pumpfeldes geben. Im Hinblick auf die Beschreibung komplexer Materiesystemen wurde in dieser Arbeit auch eine näherungsweise Berechnung der Testabsorption mit quantisiertem Strahlungsfeld im Rahmen einer Dichtematrixtheorie untersucht. Insbesondere war hier für die quantitative Beschreibung der nichtklassischen Verstärkung eine Berücksichtigung höherer Korrelationen zwingend erforderlich. Auch wurden näherungsweise Entkopplungen unter Berücksichtigung der Erhaltungsgrößen durchgeführt. Die Dichtematrixtheorie wurde auf die Untersuchung des optischen Stark-Effektes an störstellengebundenen Exzitonen in Halbleitern angewandt. Da diese Resonanzen vergleichsweise kleine homogene und inhomogene Linienbreiten aufweisen, ist hier experimentell zu erwarten, daß sich feine Effekte des quantisierten Pumpfeldes bemerkbar machen können.

### **Schlagwörter:**

Quantisiertes Strahlungsfeld, Dichtematrixtheorie an Vielteilchensystemen, nichtklassische Verstärkung, Quantenoptik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Der optische Stark-Effekt im Dicke-Modell mit quantisiertem Strahlungsfeld</b>	<b>5</b>
2.1	Modellsystem und Hamiltonian . . . . .	6
2.1.1	Kopplung an das Pumpfeld . . . . .	6
2.1.2	Lineare Testabsorption . . . . .	8
2.2	Gequetschte Strahlungsfelder . . . . .	12
2.2.1	Theoretische Beschreibung von gequetschten Zuständen . . . . .	12
2.2.2	Photonenstatistik von gequetschten Zuständen . . . . .	14
2.3	Der optische Stark-Effekt mit gequetschtem Strahlungsfeld . . . .	17
2.3.1	Das Testabsorptionsspektrum mit klassischem Pumpfeld . . . . .	17
2.3.2	Das Jaynes-Cummings-Modell . . . . .	18
2.3.3	Testabsorption für das Dicke-Modell . . . . .	22
2.3.4	Nichtklassische Verstärkung . . . . .	26
2.3.5	Zusammenfassung von Abschnitt 2.3 . . . . .	27
2.4	Das phasenempfindliche Absorptionsspektrum . . . . .	29
2.4.1	Die phasenempfindliche Testabsorption für das Jaynes-Cummings-Modell . . . . .	29
2.4.2	Die phasensensitive Testabsorption für das Dicke-Modell . . . . .	33
2.4.3	Zusammenfassung von Abschnitt 2.4 . . . . .	34
2.5	Alternative spektroskopische Methoden zur Zustandsmessung eines quantisierten Strahlungsfeldes . . . . .	35
2.5.1	Autler-Townes-Spektroskopie . . . . .	35
2.5.2	Das Spektrum der Resonanzfluoreszenz . . . . .	37
2.6	Zusammenfassung von Kapitel 2 . . . . .	39

<b>3</b>	<b>Der optische Stark-Effekt im Dicke-Modell in Dichtematrixnäherung</b>	<b>40</b>
3.1	Dichtematrixgleichungen . . . . .	41
3.2	Ergebnisse der Dichtematrixnäherung . . . . .	46
3.2.1	Ergebnisse für die Inversion . . . . .	46
3.2.2	Ergebnisse für die Testabsorption . . . . .	47
3.2.3	Zusammenfassung von Abschnitt 3.2 . . . . .	51
3.3	Dichtematrixgleichungen mit Paarkorrelationen . . . . .	52
3.3.1	Ableitung der erweiterten Dichtematrixgleichungen . . . . .	52
3.3.2	Ergebnisse der erweiterten Dichtematrixnäherung (EDMN) . . . . .	55
3.3.3	Zusammenfassung von Abschnitt 3.3 . . . . .	61
3.4	Zusammenfassung von Kapitel 3 . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Der optische Stark-Effekt an störstellengebundenen Exzitonen</b>	<b>63</b>
4.1	Störstellengebundene Exzitonen . . . . .	64
4.2	Dichtematrixtheorie für störstellengebundene Exzitonen . . . . .	66
4.2.1	Ableitung der Dichtematrixgleichungen . . . . .	66
4.2.2	Ergebnisse der Dichtematrixnäherung . . . . .	72
4.2.3	Zusammenfassung von Abschnitt 4.2 . . . . .	82
4.3	Das gepulste Pump-Test-Experiment an störstellengebundenen Exzitonen . . . . .	83
4.3.1	Theoretische Beschreibung des gepulsten Pump-Test-Experiments . . . . .	83
4.3.2	Ergebnisse für das gepulste Pump-Test-Experiment . . . . .	86
4.3.3	Zusammenfassung von Abschnitt 4.3 . . . . .	96
4.4	Dissipative Effekte . . . . .	97
4.4.1	Ableitung der Dichtematrixgleichungen . . . . .	97
4.4.2	Test der Dichtematrixnäherung . . . . .	102
4.4.3	Ergebnisse der Dichtematrixnäherung mit Dissipation . . . . .	103
4.4.4	Zusammenfassung von Abschnitt 4.4 . . . . .	107
4.5	Zusammenfassung von Kapitel 4 . . . . .	109
<b>A</b>	<b>Dichtematrixgleichungen für die Inversion mit Paarkorrelationen</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Größen in den erweiterten Dichtematrixgleichungen (3.37)</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>Beweis von Gleichung (4.53)</b>	<b>117</b>
<b>D</b>	<b>Dichtematrixgleichungen für störstellengebundene Exzitonen mit Dissipation</b>	<b>121</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die ersten Ansätze für die theoretische Beschreibung des Lichts gehen auf Christian Huygens (1629-1695) und Isaac Newton (1643-1727) zurück. Während Huygens und neben ihm auch Fresnel und Young eine Vielzahl von optischen Phänomenen im Rahmen einer Wellentheorie deuteten, favorisierte Newton eine Korpuskeltheorie des Lichts.

Im 19. Jahrhundert brachte die Beschreibung des Lichts als elektromagnetische Welle im Rahmen der Maxwell-Theorie (James Clerk Maxwell, 1831-1879) eine Entscheidung zugunsten des Wellenbildes. Die Maxwell-Theorie erwies sich als außerordentlich umfassend, und es schien so, daß sich alle optischen Phänomene zwanglos mit ihr erklären ließen.

Erst Anfang des 20. Jahrhunderts trat mit dem Spektrum der Strahlung eines schwarzen Körpers ein Phänomen auf, das sich nicht in die Maxwellsche Theorie einfügen ließ und das den ersten Anstoß zur Revision der theoretischen Beschreibung des Lichts brachte. Im Jahre 1900 war es Max Planck, der das Spektrum des von einem schwarzen Körper emittierten Lichts erfolgreich erklären konnte [1]. Er mußte dabei postulieren, daß die Energie einer Mode des Strahlungsfeldes in endlichen Energieportionen proportional zur Frequenz absorbiert und emittiert wird. Dabei stieß er auf das nach ihm benannte Plancksche Wirkungsquantum als neue Naturkonstante und legte den Grundstein für die Quantenmechanik. Im Jahre 1905 griff Albert Einstein die Vorstellung der quantisierten Energie eines Lichtfeldes auf und konnte damit die Experimente von Philipp Lenard zum lichtelektrischen Effekt erklären [2].

Im Zuge der Entwicklung der Quantentheorie haben Dirac und Fermi den Teilchen- als auch den Wellenaspekt des Lichts auf die einheitliche Grundlage der Quantisierung des Maxwell-Feldes gestellt [3, 4]. Dabei wird im wesentlichen die Mode eines Strahlungsfeldes als quantenmechanischer harmonischer Oszillator beschrieben. Die diskreten energetischen Anregungen der Mode werden Photonen genannt und tragen dem Teilchencharakter des Lichtfeldes Rechnung.

Ein wichtiger Aspekt der Quantisierung des Strahlungsfeldes sind die Fluktuationen der elektrischen Feldstärke, die auch dann auftreten, wenn keine Photonen

angeregt sind. Diese Vakuumfluktuationen spielen bei den Effekten der Spontane-emission [5], der Lamb-Verschiebung [6] oder dem Casimir-Effekt [7] eine wichtige Rolle.

Weitere experimentelle Befunde, die nur im Rahmen einer quantisierten Behandlung des Strahlungsfeldes verstanden werden können, sind Photonkorrelationen, die sogenanntes ‘Antibunching’ zeigen [8], oder die Erzeugung von sogenanntem gequetschten Licht (‘Squeezed Light’), in dem Quantenfluktuationen in bestimmten Observablen gegenüber dem Laserlichtfeld oder dem Vakuum unterdrückt sind [9].

Obwohl der Formalismus zur quantisierten Beschreibung des Lichtfeldes gut bekannt ist, reicht es für die theoretische Beschreibung vieler spektroskopischer Experimente aus, das Strahlungsfeld klassisch im Rahmen der Maxwell’schen Theorie zu beschreiben. Die sogenannten optischen Blochgleichungen [10] oder die Maxwell-Bloch-Gleichungen [11] sind ein verbreitetes Werkzeug zur Beschreibung der Materie-Licht-Wechselwirkung mit klassischem Strahlungsfeld geworden. Während diese in erster Linie atomare oder molekulare Systeme mit wenigen Energieniveaus beschreiben, ließ sich der Formalismus der optischen Blochgleichungen auch auf die Behandlung eines Vielteilchenproblems erweitern, wie es z. B. bei der Halbleiterspektroskopie auftritt [12].

Die quantisierte Behandlung des Strahlungsfeldes wird für spektroskopische Experimente wichtig, bei denen eine starke Kopplung zwischen dem Materiesystem und einzelnen Photonen erreicht wird. Dies kann beispielsweise der Fall sein, wenn das Materiesystem innerhalb eines optischen Resonators an das Lichtfeld koppelt. Die ‘Körnigkeit’ des Lichtfeldes macht sich dann bemerkbar [13]. Heutzutage ist es beispielsweise möglich, optische Resonatoren von sehr kleiner Ausdehnung und hoher Güte herzustellen, um damit große Kopplungen an einzelne Photonen zu erreichen [14, 15, 16].

In dieser Arbeit wird der Einfluß des quantisierten Strahlungsfeldes auf ein spektroskopisches Experiment untersucht, welches dem Nachweis des sogenannten optischen Stark-Effekts dient. Dabei versteht man unter dem optischen Stark-Effekt eine Verschiebung von Energieniveaus unter Einwirkung eines starken Lichtfeldes. Der erste experimentelle Nachweis dieses Effekts gelang 1955 Autler und Townes an einem Mikrowellenübergang [17]. Mit der Entwicklung des Lasers als Lichtquelle hoher Intensität wurde der optische Stark-Effekt später auch für Lichtfelder um den sichtbaren Bereich an einer großen Zahl von Systemen (Atome, Moleküle, Halbleiter) studiert [18, 19, 20, 21]. Eine dabei häufig verwendete Konfiguration ist ein Pump-Test-Experiment, in dem die durch ein starkes Pumpfeld induzierte optische Stark-Verschiebung im Absorptionsspektrum eines schwachen Testfeldes nachgewiesen wird. Besonders bemerkenswert ist bei dieser Konfiguration, daß bei verstimmtem Pumpfeld neben der verschobenen Absorptionslinie eine weitere Resonanz auftritt, bei der das Testfeld verstärkt wird. Der erste experimentelle Nachweis eines solchen Spektrums gelang 1977 F. Y. Wu und Mitarbeitern an Natriumatomen [22].

1985 und 1986 konnte der optische Stark-Effekt zum ersten Mal an Exzitonen (gebundenen Elektron-Loch-Paaren) in einem Halbleiter demonstriert werden, und zwar sowohl für einen Volumenhalbleiter als auch für ‘Quantum-Well’-Material [23, 24]. Die Untersuchungen konzentrierten sich hier zunächst auf die blauverschobene Absorptionslinie. Der Nachweis der verstärkenden Resonanz gelang an Exzitonen erst wesentlich später im Jahre 1997 [25]. Der Grund für diese zeitliche Verzögerung war in erster Linie, daß zum Nachweis des optischen Stark-Effekts an Exzitonen wegen der im Vergleich zu atomaren Resonanzen großen Linienbreiten hohe Intensitäten des Pumplichts erforderlich waren. Diese konnten erst mit Hilfe von kurzen Laserpulsen realisiert werden.

Auch aus theoretischer Sicht erweist sich der optische Stark-Effekt an Exzitonen als sehr komplexes Problem. Zum einen müssen für quantitative Vorhersagen oft komplizierte Bandstrukturen einbezogen werden. Zum anderen ist hier die Coulombwechselwirkung zwischen unterschiedlichen Exzitonen, aber auch die zwischen Exzitonen und freien Ladungsträgern, einzubeziehen [26, 27, 28]. Abschirmung und Resonanzen höherer Exzitonkomplexe (Biexzitonen) können zu einer deutlichen Modifikation des optischen Stark-Effekts führen [29].

Einfacher wird das Problem des optischen Stark-Effekt sowohl aus theoretischer als auch experimenteller Sicht, wenn die Exzitonen zusätzlich an Störstellen gebunden sind [30]. Zum einen verhalten sich störstellengebundene Exzitonen wie unabhängige Zwei-Niveau-Systeme mit vergleichsweise kleiner homogener und inhomogener Verbreiterung bei sehr guten Proben [31]. Zum anderen weisen störstellengebundene Exzitonen große Übergangsmatrixelemente auf [32]. Der optische Stark-Effekt an störstellengebundenen Exzitonen müßte daher bei weitaus geringeren Lichtintensitäten nachweisbar sein als sie bei freien Exzitonen benötigt werden. Auch könnten sich aufgrund der kleinen Linienbreite Effekte des quantisierten Strahlungsfeldes bemerkbar machen.

In dieser Arbeit wird der Einfluß eines quantisierten Strahlungsfeldes auf den optischen Stark-Effekt an störstellengebundenen Exzitonen theoretisch diskutiert.

Dazu werden im Kapitel 2 die Zusatzeffekte beleuchtet, die bei quantisierter Behandlung des Strahlungsfeldes entstehen können. Die störstellengebundenen Exzitonen werden hier als unabhängige Zwei-Niveau-Systeme ohne inhomogene Verbreiterung behandelt. Es wird gezeigt, daß die Linienform durch ein gequetschtes Lichtfeld modifiziert wird, zusätzliche Unterstrukturen in den Spektren entstehen und Verstärkungseffekte verursacht werden, die klassisch nicht interpretierbar sind.

In Kapitel 3 wird dann der optische Stark-Effekt mit quantisiertem Strahlungsfeld im Rahmen einer Dichtematrixnäherung behandelt. Dies ermöglicht es im Hinblick auf ein Vielteilchenproblem, sehr große Zahlen von Zwei-Niveau-Systemen einzubeziehen.

Während in den Kapiteln 2 und 3 die inhomogene Verbreiterung der störstellengebundenen Exzitonen vernachlässigt wird, wird sie in Kapitel 4 berücksichtigt. Es wird diskutiert, wie sich die inhomogene Verbreiterung auf die durch



das quantisierte Strahlungsfeld verursachten Zusatzeffekte auswirkt. Außerdem wird neben dem Pump-Test-Experiment mit stationären Lichtfeldern auch ein gepulstes Experiment theoretisch untersucht. Zum Abschluß werden dissipative Effekte explizit einbezogen und diskutiert.

# Kapitel 2

## Der optische Stark-Effekt im Dicke-Modell mit quantisiertem Strahlungsfeld

In diesem Kapitel wird der Einfluß eines quantisierten Strahlungsfeldes im optischen Stark-Effekt an identischen Zwei-Niveau-Systemen (TLS = ‘two-level system’) diskutiert. Bezug genommen wird auf ein Pump-Test-Experiment, welches eine gängige Methode zum Nachweis des optischen Stark-Effekts darstellt [22, 19, 24]. Es werden Effekte vorgestellt, die mit der quantisierten Behandlung des Strahlungsfeldes im optischen Stark-Effekt zusammenhängen und die sich mit Hilfe der sogenannten ‘Dressed States’ interpretieren lassen.

Im ersten Abschnitt wird das theoretische Modell für das Pump-Test-Experiment erläutert und die durch den optischen Stark-Effekt modifizierte lineare Testabsorption mit Hilfe der ‘Dressed States’ berechnet.

Im zweiten Abschnitt werden die Eigenschaften von sogenannten gequetschten Zuständen des Strahlungsfeldes zusammenfassend dargestellt. Diese Zustände lassen sich nur in einer quantisierten Behandlung des Strahlungsfeldes korrekt beschreiben. Auf die experimentelle Erzeugung dieser Zustände wird kurz eingegangen.

Im dritten Abschnitt wird der Einfluß eines gequetschten Pumpfeldes auf die durch den optischen Stark-Effekt verschobenen Resonanzlinien im Testabsorptionsspektrum diskutiert. Neben der Modifikation der Linienform durch Fluktuationen der Photonenzahl (Photonenstatistik), werden insbesondere für das Dicke-Modell (mehr als ein TLS) Zusatzeffekte wie nichtklassische Verstärkung und Unterstrukturen innerhalb der Resonanzen erwartet. Mit Hilfe der ‘Dressed States’ lassen sich die gefundenen Effekte interpretieren.

Im vierten Abschnitt wird auf phasenempfindliche Effekte eingegangen, die entstehen, wenn die TLS mit Hilfe eines vorangehenden Laserpulses in eine kohärente Überlagerung ihrer jeweiligen beiden Zustände präpariert werden. Die Linienform im optischen Stark-Effekt läßt für diesen Fall Rückschlüsse auf Nichtdiagono-

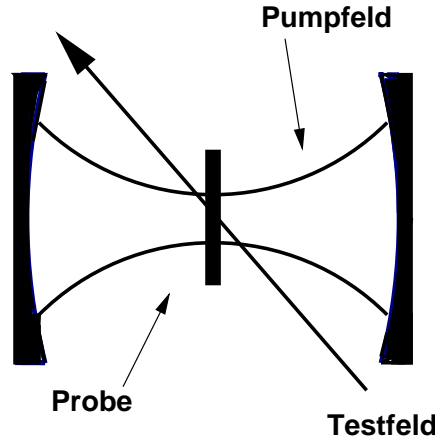


Abbildung 2.1: Schema des Pump-Test-Experiments.

nalelemente der Dichtematrix eines gequetschten Strahlungsfeldes zu.

Im fünften Abschnitt werden abschließend alternative Methoden beschrieben, die eine spektroskopische Messung der Eigenschaften eines Quantenzustands eines Strahlungsfeldes ermöglichen. Es sind die Autler-Townes-Spektroskopie und der Nachweis des Spektrums der Resonanzfluoreszenz, die zwei weitere Varianten zur Detektion des optischen Stark-Effekts darstellen.

## 2.1 Modellsystem und Hamiltonian

### 2.1.1 Kopplung an das Pumpfeld

Das im folgenden betrachtete Modellsystem besteht aus  $N$  identischen Zwei-Niveau-Systemen (TLS) mit Grundzustand  $|g\rangle$  und angeregtem Zustand  $|e\rangle$ . Die TLS befinden sich in einem optischen Resonator und sind auf einen räumlichen Bereich lokalisiert, der klein gegen die optische Wellenlänge ist. Es wird ein monochromatisches Pumpfeld eingestrahlt, welches resonant zur Eigenfrequenz einer Resonatormode ist. Das Pumpfeld ist nahresonant zum optischen Übergang der TLS und mit Hilfe des Resonators wird eine starke Kopplung zwischen den TLS und den Pumpphotonen erreicht. Zusätzlich wird ein Testfeld wie in Abb. 2.1 eingestrahlt, welches nichtresonant zu den Resonatormoden ist. Der Hamiltonoperator, der dieses System (ohne das Testfeld) adäquat beschreibt, lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \sum_{\nu=1}^N \{ \hbar\omega_g g_{\nu}^{\dagger} g_{\nu} + \hbar\omega_e e_{\nu}^{\dagger} e_{\nu} \} + \hbar\omega_p \left\{ a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \right\} + \\ & + \hbar g \sum_{\nu=1}^N \{ g_{\nu}^{\dagger} e_{\nu} a^{\dagger} + a e_{\nu}^{\dagger} g_{\nu} \}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Hier sind  $a^\dagger$  und  $a$  die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Pumpphotonen. Die Operatoren  $g_\nu^\dagger$  und  $g_\nu$  erzeugen und vernichten ein Elektron im Zustand  $|g\rangle$  des  $\nu$ -ten TLS.  $e_\nu^\dagger$  und  $e_\nu$  sind die entsprechenden Operatoren für den angeregten Zustand  $|e\rangle$  des  $\nu$ -ten TLS. Ferner ist  $\hbar\omega_g$  die Energie des Grundzustands  $|g\rangle$ ,  $\hbar\omega_e$  die des angeregten Zustands  $|e\rangle$  und  $\omega_p$  die Pumpfrequenz.

Mit diesen Bezeichnungen beschreibt der erste Term des Hamiltonoperators die Energie der TLS, der zweite Term die Energie des Pumpfeldes und der dritte Term die Wechselwirkung zwischen Pumpfeld und TLS in Dipolnäherung. Im Rahmen einer ‘Rotating-Wave-Approximation’ sind schnell oszillierende Terme vernachlässigt worden [33]. Die Kopplungskonstante  $g$  wird gegeben durch [34]

$$g = \sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{\epsilon_0 V_m}} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.2)$$

Hier ist  $\mathbf{d}$  das Dipolmatrixelement des Übergangs zwischen  $|g\rangle$  und  $|e\rangle$ .  $\boldsymbol{\epsilon}$  bezeichnet den Polarisationsvektor des Pumpfeldes.  $V_m$  ist das Modenvolumen des Pumpfeldes, das von den Eigenschaften des optischen Resonators abhängt.

Für das weitere Vorgehen ist es günstig, kollektive Operatoren zur Beschreibung der TLS einzuführen:

$$J_+ = \sum_{\nu=1}^N e_\nu^\dagger g_\nu, \quad J_- = \sum_{\nu=1}^N g_\nu^\dagger e_\nu, \quad J_3 = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} \{e_\nu^\dagger e_\nu - g_\nu^\dagger g_\nu\}. \quad (2.3)$$

Diese Operatoren genügen den Vertauschungsrelationen von (verallgemeinerten) Drehimpulsoperatoren:

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_3. \quad (2.4)$$

Mit Hilfe der so definierten  $J$ -Operatoren läßt sich der Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$  vereinfachen zu

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_p \mathcal{K} + \hbar\Delta J_3 + \hbar g (J_+ a + a^\dagger J_-). \quad (2.5)$$

Die irrelevante Konstante  $k$  der Größe

$$k = \frac{1}{2} \hbar [(\omega_g + \omega_e - \omega_p)N + \omega_p] \quad (2.6)$$

ist dabei fortgelassen worden. Es bezeichnet  $\Delta = (\omega_e - \omega_g) - \omega_p$  die Pumpverstimmung. Des weiteren ist der kombinierte Operator  $\mathcal{K}$  mit

$$\mathcal{K} = a^\dagger a + J_3 + \frac{N}{2} \quad (2.7)$$

eingeführt worden, dessen ganzzahligen Eigenwerte die Pumpphotonenzahl plus die Zahl der angeregten TLS angeben. Er soll als Anregungszahloperator bezeichnet werden. Da  $\mathcal{K}$  mit  $\mathcal{H}_0$  vertauscht, stellt der Anregungszahloperator eine

Erhaltungsgröße des Systems dar. Hier ist zu beachten, daß die Erhaltung der Anregungszahl eng mit der ‘Rotating Wave Approximation’ zusammenhängt, da in dieser gerade die Terme vernachlässigt werden, die die Anregungszahlerhaltung verletzen.

Eine weitere Erhaltungsgröße wird durch den Gesamtdrehimpuls  $J^2$  gegeben, der folgender Definition genügt:

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2. \quad (2.8)$$

Die Drehimpulseigenzustände  $|j, m\rangle$  mit

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, & J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\ j &= 0, 1, \dots, N/2, & m &= -j, -j+1, \dots, j \end{aligned} \quad (2.9)$$

stellen eine geeignete Bezugsbasis für das Untersystem der TLS dar.

Die Basis der ungekoppelten Eigenzustände für  $g = 0$ , die sogenannten ‘Bare States’, werden durch die Zustände

$$\left\{ |n; j, m\rangle; n = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 0; m = -j, -j+1, \dots, j \right\} \quad (2.10)$$

gegeben, wobei  $n$  die Zahl der Pumpphotonen angibt.

Die Eigenzustände von  $\mathcal{H}_0$  für  $g \neq 0$ , die sogenannten ‘Dressed States’, sind als simultane Eigenzustände von  $J^2$  und  $\mathcal{K}$  wählbar und mit  $\{|\mu; j, k\rangle\}$  bezeichnet. Hier gibt  $\mu$  den Energieindex an und es gilt:

$$\mathcal{H}_0 |\mu; j, k\rangle = \hbar(\epsilon_\mu(j, k) + k \omega_p) |\mu; j, k\rangle. \quad (2.11)$$

Ein ‘Dressed State’ ist für gegebene Anregungszahl  $k$  eine Superposition von endlich vielen ‘Bare States’, die die Gleichung  $k = n + m + N/2$  erfüllen. Der Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$  zerfällt damit in Untermatrizen der maximalen Dimension  $2N + 1$ .

### 2.1.2 Lineare Testabsorption

Zur Berechnung der linearen Testabsorption muß zusätzlich die Kopplung an das Testfeld berücksichtigt werden. Da das Testfeld nichtresonant zu den Resonatormoden ist und außerdem als schwach angenommen wird, ist der Einfluß von Quantenfluktuationen im Testfeld vernachlässigbar [35]. Eine näherungsweise klassische Behandlung des Testfeldes ist unter diesen Annahmen erlaubt. Die Wechselwirkung zwischen dem Testfeld und den TLS wird dann beschrieben durch

$$\mathcal{V} = \hbar \tilde{g}(J_+ A(t) e^{-i\omega t} + h.c.), \quad (2.12)$$

wobei  $A(t)$  die (eventuell zeitabhängige) Feldamplitude des Testfeldes bezeichnet. Ebenfalls wurde hier die ‘Rotating-Wave-Approximation’ durchgeführt. Die Kopplungskonstante des Testfeldes ist mit  $\tilde{g}$  bezeichnet und wesentlich kleiner als  $g$ . Der gesamte Hamiltonoperator für das Pump-Test-Experiment folgt damit als

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}. \quad (2.13)$$

Für die Testabsorption ist die testinduzierte, lineare Polarisation  $\mathcal{P}_-(t)$  zu bestimmen, die gegeben ist durch

$$\mathcal{P}_-(t) = \hbar \tilde{g} \langle J_-^{(1)}(t) \rangle. \quad (2.14)$$

Hier bezeichnet  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle$  den Anteil des Erwartungswertes von  $\langle J_-(t) \rangle$ , der linear im Testfeld ist.

Das Absorptionsvermögen  $\mathcal{A}_\omega$  des Testfeldes ist proportional zu

$$\mathcal{A}_\omega \propto - \frac{\text{Im}(\int dt \mathcal{P}_-(t) A^*(t) e^{i\omega t})}{\int dt |A(t)|^2}. \quad (2.15)$$

Für ein Testfeld mit konstanter Feldamplitude  $A$  folgt das Absorptionsvermögen aus dem Grenzübergang:

$$\mathcal{A}_\omega \propto - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{Im}(\int_{-T}^T dt \mathcal{P}_-(t) e^{i\omega t})}{2TA}. \quad (2.16)$$

Die testinduzierte Polarisation  $\mathcal{P}_-(t)$  läßt sich mittels zeitabhängiger Störungstheorie bestimmen. Unter Anwendung der Kubo-Formel [36] folgt für stationäres Pump- und Testfeld:

$$\mathcal{P}_-(t) e^{i\omega t} = i\hbar \tilde{g}^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^t dt' \langle [J_-^{(0)}(t), J_+^{(0)}(t')] \rangle A e^{-i\omega(t'-t)}. \quad (2.17)$$

Hier bedeutet der hochgestellte Index (0), daß die Zeitentwicklung der Operatoren bezüglich des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}_0$  in (2.5) und damit in nullter Ordnung im Testfeld zu bestimmen ist. Ein weiterer Anteil proportional zu  $A^*$ , der schnell oszilliert und folglich keinen Beitrag zu  $\mathcal{A}_\omega$  liefert, ist bereits in (2.17) fortgelassen worden.

Ein expliziter Ausdruck für das Absorptionsvermögen (2.17) läßt sich mit Hilfe der ‘Dressed States’ angeben. Es sollen Anfangszustände mit  $j = N/2$  betrachtet werden. Der nicht angeregte Zustand stellt einen Spezialfall für einen solchen Anfangszustand dar, wobei hier zusätzlich  $m = -N/2$  ist. Es kann sich jedoch bei einem Zustand mit  $j = N/2$  auch um einen optisch angeregten Zustand handeln. Hier ist zu beachten, daß im Falle der optischen Anregung die Quantenzahl  $j$  erhalten bleibt. Es folgt für die Anfangszustände mit  $j = N/2$  das

Absorptionsvermögen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega \propto \pi \hbar \tilde{g}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \{ & \sum_{\mu(k), \mu'(k+1)} g_{\mu, \mu', k}^{(+)} \delta(\omega - \omega_p - (\epsilon_{\mu'}(k+1) - \epsilon_\mu(k))) - \\ & - \sum_{\mu(k), \mu'(k-1)} g_{\mu, \mu', k}^{(-)} \delta(\omega - \omega_p - (\epsilon_\mu(k) - \epsilon_{\mu'}(k-1))) \}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da  $J^2$  eine Erhaltungsgröße darstellt, ist der Index  $j$  hier unterdrückt worden. Für die Gewichtungsfaktoren  $g_{\mu, \mu', k}^{(+)}$  und  $g_{\mu, \mu', k}^{(-)}$  der jeweiligen Absorptionspeaks gilt:

$$\begin{aligned} g_{\mu, \mu', k}^{(+)} &= f_{\mu, k} |\langle \mu', k+1 | J_+ | \mu, k \rangle|^2 \\ g_{\mu, \mu', k}^{(-)} &= f_{\mu, k} |\langle \mu', k-1 | J_- | \mu, k \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$f_{\mu, k}$  ist die effektive Besetzung der ‘Dressed State’  $|\mu, k\rangle$  und kann mit Hilfe des Dichteoperators des Anfangszustands  $\rho_0$  ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned} f_{\mu, k} &= \sum_{n, n'=0}^{\infty} \sum_{m, m'=-N/2}^{N/2} \rho_{n, n'}^{m, m'} \langle n, m | \mu, k \rangle \langle \mu, k | n', m' \rangle; \\ \rho_{n, n'}^{m, m'} &= \langle n', m' | \rho_0 | n, m \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wird ein Anfangszustand betrachtet, bei dem keine Verschränkung zwischen dem Pumpfeld und den TLS besteht, d. h.

$$\rho_0 = \rho^{(f)} \otimes \rho^{(TLS)}, \quad (2.21)$$

so hängt im allgemeinen die effektive Besetzung  $f_{\mu, k}$  sowohl von Diagonal- als auch von Nichtdiagonalelementen des Dichteoperators des Pumpfeldes  $\rho^{(f)}$  bezüglich der Basis der Fockzustände  $\{|n\rangle; n = 0, 1, 2, \dots\}$  ab. Die Testabsorption wird folglich vom Quantenzustand des Pumpfeldes mitbestimmt. Für den Sonderfall, daß alle TLS zu Beginn in ihrem Grundzustand  $|g\rangle$  sind, vereinfacht sich die effektive Besetzung  $f_{\mu, k}$  zu

$$f_{\mu, k} = \langle n = k | \rho^{(f)} | n = k \rangle |\langle n = k, m = -N/2 | \mu, k \rangle|^2. \quad (2.22)$$

Sie hängt hier nur noch von der Photonenstatistik des Pumpfeldes ab, die durch

$$p_n = \langle n | \rho^{(f)} | n \rangle \quad (2.23)$$

gegeben ist. Für die lineare Testabsorption  $\mathcal{A}_\omega$  folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\omega \propto \pi \hbar \tilde{g}^2 \sum_{k=0}^{\infty} g_{\mu, \mu', k} \delta(\omega - \omega_p - (\epsilon_{\mu'}(k+1) - \epsilon_\mu(k))) \\ g_{\mu, \mu', k} \equiv (f_{\mu, k} - f_{\mu', k+1}) |\langle \mu', k+1 | J_+ | \mu, k \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dieser Ausdruck läßt die einfache Interpretation zu, daß sich das Gewicht für die Absorption von ‘Dressed State’  $|\mu, k\rangle$  zu ‘Dressed State’  $|\mu', k+1\rangle$  aus dem Produkt von Übergangsmatrixelement und Besetzungsdifferenz der ‘Dressed States’ ergibt.

### Summenregel:

Für das Testabsorptionsspektrum läßt sich mit (2.16) und (2.18) und unter Berücksichtigung der Vertauschungsrelationen (2.4) die folgende Summenregel ableiten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_{\omega} = -2\pi\hbar\tilde{g}^2 \overline{\langle J_3^{(0)}(t) \rangle}. \quad (2.25)$$

Dabei bedeutet der Querstrich die zeitliche Mittelung des Erwartungswertes.

Da mit wachsender Pumpintensität die zeitgemittelte Inversion sich der Null nähert und folglich die Gesamtfläche unter dem Testabsorptionsspektrum nach der Summenregel abnimmt, hat eine wachsende Pumpintensität ein Ausbleichen der Testabsorption zur Folge.

### Semiklassische Testabsorption:

Um die Testabsorption für den Fall eines klassischen Pumpfeldes zu erhalten, sind die Photonenoperatoren  $a^\dagger$  und  $a$  durch die Amplituden  $\beta e^{i\omega_p t}$  und  $\beta^* e^{-i\omega_p t}$  zu ersetzen, wobei  $\beta$  eine komplexe Zahl ist. Für die semiklassische Testabsorption folgt dann bei einer anfänglichen Besetzung der Grundzustände der TLS und bei positiver Pumpverstimung  $\Delta > 0$ :

$$\mathcal{A}_{\omega} \propto \left(1 + \frac{\Delta}{\tilde{\Omega}}\right)^2 \delta(\omega - \omega_p - \tilde{\Omega}) - \left(1 - \frac{\Delta}{\tilde{\Omega}}\right)^2 \delta(\omega - \omega_p + \tilde{\Omega}), \quad (2.26)$$

wobei  $\tilde{\Omega} = \sqrt{4g^2|\beta|^2 + \Delta^2}$  die verallgemeinerte Rabifrequenz bezeichnet.

Das Testabsorptionsspektrum besteht für den semiklassischen Grenzfall aus zwei Resonanzen mit unterschiedlichem Vorzeichen, die gegenüber der Pumpfrequenz um die verallgemeinerte Rabifrequenz  $\tilde{\Omega}$  blau- bzw. rotverschoben sind. In Abschnitt 2.3.1 wird das Testabsorptionsspektrum für den semiklassischen Fall noch genauer diskutiert werden.



## 2.2 Gequetschte Strahlungsfelder

Im Rahmen dieser Arbeit wird der optische Stark-Effekt unter anderem für quantisierte Strahlungsfelder untersucht, die sich in einem gequetschten Zustand befinden. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Erzeugung und die Eigenschaften von gequetschten Zuständen gegeben. Ausführliche Darstellungen sind einer Reihe von Lehrbüchern [37, 38] oder Artikeln [39, 40] zu entnehmen.

### 2.2.1 Theoretische Beschreibung von gequetschten Zuständen

Die Untersuchung von gequetschten Zuständen des Strahlungsfeldes ist im letzten Jahrzehnt ein wesentlicher Forschungsgegenstand in den Gebieten der Quantenoptik und der nichtlinearen Optik geworden. Die experimentelle Erzeugung dieser Zustände gelingt durch nichtlineare optische Prozesse, die es ermöglichen, Quantenfluktuationen eines Strahlungsfeldes gezielt zu manipulieren [9, 41]. Insbesondere lassen sich auf diese Weise Lichtfelder präparieren, bei denen Quantenfluktuationen bestimmter Observablen (z. B. der Photonenzahl) unterhalb der entsprechenden Quantenfluktuationen von Laserlicht liegen. Im englischen Sprachraum hat sich für diese Art von Licht der Begriff des ‘Squeezed Light’ (= gequetschtes Licht) etabliert.

Neben einigen potentiellen Anwendungsmöglichkeiten von gequetschtem Licht in hochempfindlichen Interferometern oder in der Informationsübertragung [42, 43] sind gequetschte Zustände des Strahlungsfeldes auch aus theoretischer Sicht von großem Interesse, da sie sich klassisch nicht korrekt beschreiben lassen.

Ausgangspunkt für die theoretische Beschreibung eines gequetschten Zustands ist der kohärente Zustand oder Glauber-Zustand [44], der als Eigenzustand des Photonenvernichters  $a$  definiert ist:

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.27)$$

Ein solcher Zustand läßt sich mit Hilfe des Verschiebungsoperators  $D(\alpha)$  darstellen:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle; \quad D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \quad (2.28)$$

Er beschreibt den Zustand des Lichtfeldes, welches von einem (idealen) Laser emittiert wird, der weit oberhalb seiner Schwelle und im Einmodenbetrieb betrieben wird [45].

Nun werden die sogenannten Quadraturkomponenten des Feldes eingeführt, deren Erwartungswerte den Real- und Imaginärteil der komplexen Feldamplitude liefern, und die definiert sind durch

$$x = \frac{1}{2}(a + a^\dagger); \quad p = -\frac{i}{2}(a - a^\dagger). \quad (2.29)$$

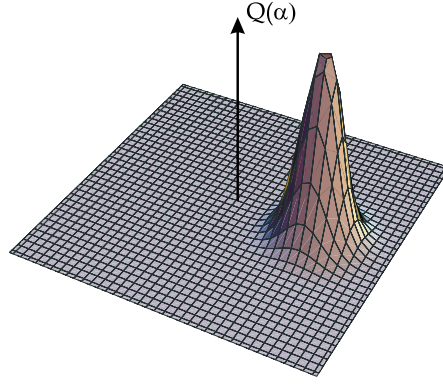


Abbildung 2.2: Q-Funktion eines kohärenten Feldes.

Die Operatoren  $x$  und  $p$  sind in Analogie zum Orts- und Impulsoperator für den harmonischen Oszillator zu sehen. Insbesondere vertauschen sie nicht und die Varianzen der Erwartungswerte genügen der Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{4}. \quad (2.30)$$

Werden die Varianzen für den kohärenten Zustand (2.28) ausgewertet, so folgt, daß es sich um einen Zustand mit minimalem Unschärfeprodukt und gleichen Varianzen in beiden Komponenten handelt ( $\Delta x = \Delta p = 1/2$ ).

Durchläuft ein Lichtfeld einen optischen parametrischen Oszillator (OPO), so läßt sich die nichtlineare Wechselwirkung durch folgenden Hamiltonoperator beschreiben [46]:

$$\mathcal{H} = i\hbar(\kappa a^{\dagger 2} - \kappa^* a^2) \quad (2.31)$$

Dieser Hamiltonoperator führt direkt auf den sogenannten Quetschoperator

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2}\right); \quad \xi = r e^{i\theta}, \quad (2.32)$$

der angewandt auf den kohärenten Zustand in (2.28) einen gequetschten Zustand  $|\alpha, \xi\rangle$  liefert. Für  $\theta = 0$  sind die Varianzen der Quadraturkomponenten gegeben durch

$$\Delta x = \frac{1}{2}e^{-r}, \quad \Delta p = \frac{1}{2}e^r. \quad (2.33)$$

Der gequetschte Zustand hat wie der kohärente Zustand ein minimales Unschärfeprodukt, jedoch sind die Quantenfluktuationen in den beiden Quadraturkomponenten nicht gleich groß. Während sie in einer Komponenten unterdrückt (bzw. gequetscht) sind, sind sie in der anderen erhöht.

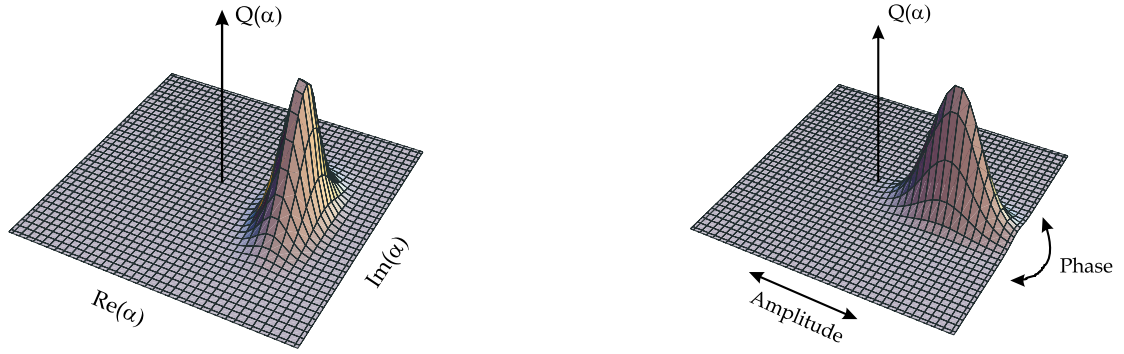


Abbildung 2.3: Q-Funktion eines gequetschten Feldes für  $\theta = 0$  (amplitudengequetscht, links) und für  $\theta = \pi$  (phasengequetscht, rechts).

Die Quantenfluktuationen von gequetschten Zuständen lassen sich mit Hilfe von quasiklassischen Amplitudenverteilungen veranschaulichen, die den Dichteoperator des Feldes  $\rho^{(f)}$  in der Basis der kohärenten Zustände  $\{|\alpha\rangle\}$  repräsentieren. Da die kohärenten Zustände eine übervollständige Basis darstellen, ist eine quasiklassische Verteilungsfunktion nicht eindeutig definierbar. Die prominentesten Vertreter der quasiklassischen Verteilungsfunktionen sind die  $P$ -Funktion, die Wigner-Funktion und die  $Q$ -Funktion [47], wobei letztere hier betrachtet werden soll. Die  $Q$ -Funktion ist definiert durch

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho^{(f)} | \alpha \rangle. \quad (2.34)$$

In Abb. 2.2 ist die  $Q$ -Funktion eines kohärenten Strahlungsfeldes gezeigt. Hier sind die Fluktuationen der Amplitude symmetrisch um den Mittelwert verteilt. In Abb. 2.3 sind die  $Q$ -Funktionen für zwei gequetschte Zustände mit  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$  gezeigt. Die Fluktuationen der (komplexen) Amplitude sind nun nicht mehr symmetrisch verteilt, sondern sind für eine Komponente verringert (gequetscht), während sie für die andere Komponente erhöht sind. Bildlich gesprochen ist die ursprüngliche Amplitudenverteilung des kohärenten Zustands in Abb. 2.2 in einer bestimmten Richtung zusammengequetscht worden, die durch die Phase  $\theta$  festgelegt wird. Dieses Bild hat den Begriff der ‘Squeezed States’ motiviert.

### 2.2.2 Photonenstatistik von gequetschten Zuständen

Das Quetschen eines Strahlungsfeldes beeinflusst nicht nur die Quantenfluktuationen der Quadraturkomponenten, sondern auch die Quantenfluktuationen in der Photonenzahl (Photonenstatistik) und der Phase. Während die Photonenzahl  $p_n$  für einen kohärenten Zustand  $|\alpha\rangle$  einer Poissonverteilung genügt

$$p_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.35)$$

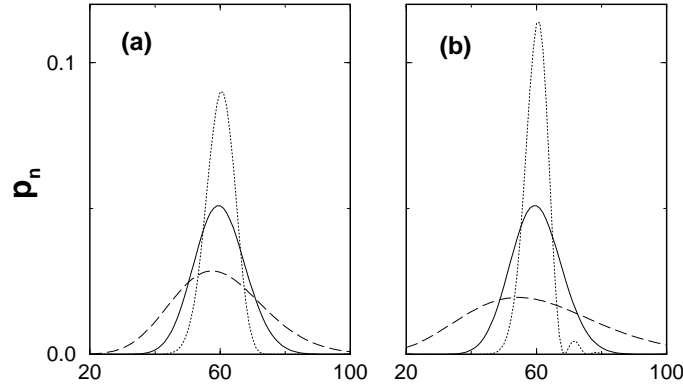


Abbildung 2.4: Photonenzahlverteilung für ein phasengequetschtes (gestrichelte Kurve), ein kohärentes (durchgezogene Kurve) und ein amplitudengequetschtes (gepunktete Kurve) Strahlungsfeld für (a)  $|\xi| = 0,6$ , (b)  $|\xi| = 1,0$ .

weicht für einen gequetschten Zustand die Photonenzahlverteilung von der Poissonstatistik ab. Die Photonenzahlverteilung des gequetschten Feldes wird durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$p_n = \frac{|\nu|^n}{n! \mu (2\mu)^n} e^{-|\beta|^2 + \text{Re}(\nu^* \beta^2 / \mu)} \left| H_n \left( \frac{\beta}{\sqrt{2\mu} |\nu|} e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \right|^2$$

wobei  $\mu = \cosh(|\xi|)$ ,  $\nu = e^{i\theta} \sinh(|\xi|)$ ,  $\beta = \mu\alpha + \nu\alpha^*$ . (2.36)

$H_n(z)$  ist das Hermite-Polynom  $n$ -ter Ordnung.

Bereits anhand der  $Q$ -Funktionen in Abb. 2.3 läßt sich ablesen, daß der gequetschte Zustand mit  $\theta = 0$  bezüglich des kohärenten Zustands unterdrückte Fluktuationen des Amplitudenbetrags und damit der Photonenzahl aufweist. Für  $\theta = \pi$  sind hingegen die Quantenfluktuationen in der Phase unterdrückt und die Quantenfluktuationen im Amplitudenbetrag (oder der Photonenzahl) erhöht. Im folgenden wird deshalb bei  $\theta = 0$  von einem amplitudengequetschten und bei  $\theta = \pi$  von einem phasengequetschten Strahlungsfeld gesprochen.

In Abb. 2.4 ist für zwei Quetschparameter die jeweilige Photonenzahlverteilung des amplitudengequetschten (gepunktete Kurve) und phasengequetschten (gestrichelte Kurve) Zustands mit der des kohärenten Zustands (durchgezogene Kurve) bei gleicher mittlerer Photonenzahl verglichen. Während der amplitudengequetschte Zustand eine Subpoissonstatistik aufweist, zeigt der phasengequetschte Zustand eine Verbreiterung der Photonenzahlverteilung gegenüber dem kohärenten Zustand. Die Superpoissonstatistik des phasengequetschten Zustands ist zudem leicht asymmetrisch. Bemerkenswert ist weiter, daß für große Quetschparameter  $|\xi|$  für den amplitudengequetschten Zustand Satelliten bei höheren Photonenzahlen auftreten (Abb. 2.4.b).

Experimentell wird gequetschtes Licht in der Regel mit Hilfe eines optischen parametrischen Oszillators (OPO) erzeugt [48]. Es ist aber auch möglich, Quetsch-

licht mit Hilfe anderer nichtlinearer optischer Prozesse herzustellen. Beispielsweise konnte gequetschtes Licht in der Frequenzverdopplung (‘Second Harmonic Generation’) nachgewiesen werden [49]. Die maximalen Quetschparameter, die experimentell bisher erzielt wurden, liegen bei  $|\xi| = 2$  [41].

Der Nachweis von gequetschten Zuständen erfolgt in der Regel in einer sogenannten Homodynmessung [50], bei der das gequetschte Lichtfeld mit einem starken kohärenten Lichtfeld an einem Strahlteiler gemischt wird. Das Differenzsignal der Photodetektoren in den beiden Ausgangskanälen des Strahlteilers liefert Aufschluß über die Quantenfluktuationen des gequetschten Lichtfeldes. Durch Variation der Phase des starken Lichtfeldes läßt sich außerdem der Zustand der Strahlungsfeldes in einer Art tomographischem Verfahren vollständig bestimmen [51]. Auf diese Weise gelang der indirekte Nachweis der Photonenzustände von gequetschten Zuständen des Strahlungsfeldes [52].

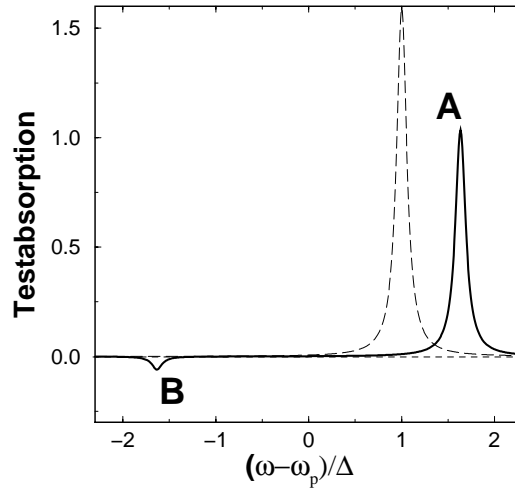


Abbildung 2.5: Semiklassische Testabsorption für  $\Omega = 1,3 \Delta$ . Die zusätzlich eingezeichnete gestrichelte Kurve zeigt die unverschobene Testabsorption.

## 2.3 Der optische Stark-Effekt mit gequetschem Strahlungsfeld

In diesem Abschnitt wird der Einfluß eines gequetschten Pumpfeldes auf den im Pump-Test-Experiment nachgewiesenen optischen Stark-Effekt diskutiert. Im ersten Teilabschnitt wird dazu zunächst als Bezugspunkt die Testabsorption für ein klassisches Pumpfeld gezeigt. Im zweiten Teilabschnitt wird dann die Testabsorption für gequetschte Pumpfelder diskutiert, und zwar zunächst für den Fall eines TLS (Jaynes-Cummings-Modell). Im dritten Teilabschnitt werden dann die Betrachtungen auf eine beliebige Zahl von TLS erweitert (Dicke-Modell). Im vierten Teilabschnitt wird der Effekt der nichtklassischen Verstärkung für das Dicke-Modell vorgestellt. Die Zusatzeffekte, die aufgrund der quantisierten Behandlung des Strahlungsfeldes auftreten, werden mit Hilfe der ‘Dressed States’ interpretiert.

### 2.3.1 Das Testabsorptionsspektrum mit klassischem Pumpfeld

In Abb. 2.5 ist das Testabsorptionsspektrum für ein klassisches Pumpfeld gezeigt. Die Pumpverstimmung  $\Delta$  ist hier in der Größenordnung der Rabifrequenz  $\Omega$ . Letztere ist durch  $\Omega = 2g\sqrt{\langle n \rangle}$  definiert, wobei  $\langle n \rangle$  die mittlere Pumpphotonenzahl bezeichnet. Diese ist proportional zur Intensität des Pumpfeldes. Das TLS hat sich zu Beginn in seinem Grundzustand  $|g\rangle$  befunden. Um Resonanzen endlicher Breite zu erhalten, ist eine kleine homogene Verbreiterung von  $\gamma = 0,05\Omega$  angenommen worden.

Das Spektrum besteht aus zwei Resonanzen  $A$  und  $B$ , welche gegenüber der

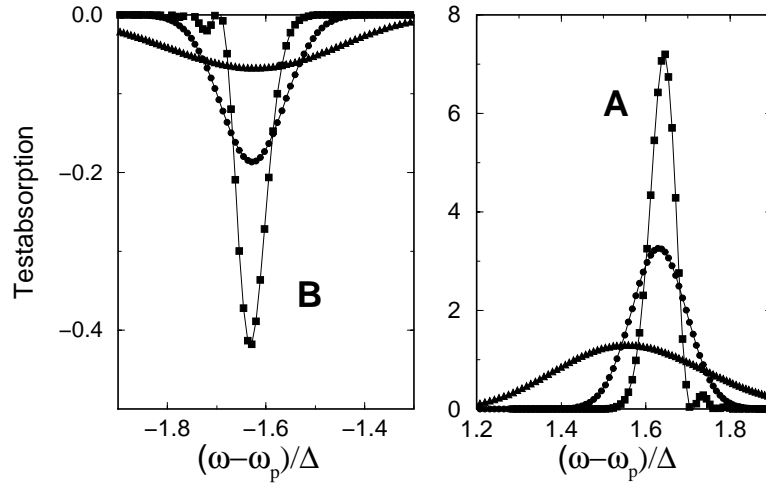


Abbildung 2.6: Testabsorption für gequetschte Pumpfelder; Dreiecke:  $\xi = -1$ , Kreise:  $\xi = 0$ , Quadrate:  $\xi = 1$ . Weitere Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ .

Pumpfrequenz um die verallgemeinerte Rabifrequenz  $\tilde{\Omega} = \sqrt{4g^2\langle n \rangle + \Delta^2}$  verschoben sind. Die Absorptionslinie *A*, welche das Spektrum dominiert, ist gegenüber der ungepumpten Absorption des TLS bei  $(\omega - \omega_p)/\Delta = 1$  (gestrichelte Kurve) blauverschoben. Diese Verschiebung wird als optische Stark-Verschiebung bezeichnet. Zusätzlich tritt gespiegelt zur Pumpfrequenz  $\omega_p$  eine kleine Resonanz *B* auf, bei der das Testfeld verstärkt wird.

Der experimentelle Nachweis dieser beiden Komponenten des Spektrums gelang zum ersten Mal 1977 [22] an Natriumatomen. An freien Exzitonen in Halbleitern wurde die blauverschobene Resonanz *A* erst acht Jahre später detektiert [24, 23]. Als noch problematischer erwies sich die Messung der verstärkenden Resonanz *B* an freien Exzitonen, die erst 1997 gelang [25].

### 2.3.2 Das Jaynes-Cummings-Modell

Im folgenden soll die Testabsorption für ähnliche Parameter wie in Abb. 2.5 für gequetschte Pumpfelder diskutiert werden, wobei zunächst auf den Fall eines TLS ( $N = 1$ ) Bezug genommen wird. Der Hamiltonian  $\mathcal{H}_0$  in (2.5) entspricht dann dem des Jaynes-Cummings-Modells [53, 54].

Die Resonanzen *A* und *B* aus Abb. 2.5 treten für die quantisierte Behandlung des Pumpfeldes ebenfalls in der Testabsorption auf. In Abb. 2.6 sind die entsprechenden Bereiche *A* und *B* für ein phasengequetschtes (Dreiecke), ein kohärentes (Kreise) und ein amplitudengequetschtes (Quadrate) Pumpfeld gezeigt. Dabei kennzeichnet jedes Symbol die Lage und Höhe einer Resonanzlinie. Der Vergleich mit der jeweiligen in Abb. 2.4.b gezeigten Photonenstatistik zeigt, daß sich insbesondere im Absorptionsbereich *A* die Photonenstatistik des Pumpfeldes direkt in der Linienform der Einhüllenden aller Resonanzen widerspiegelt. Ähnliches

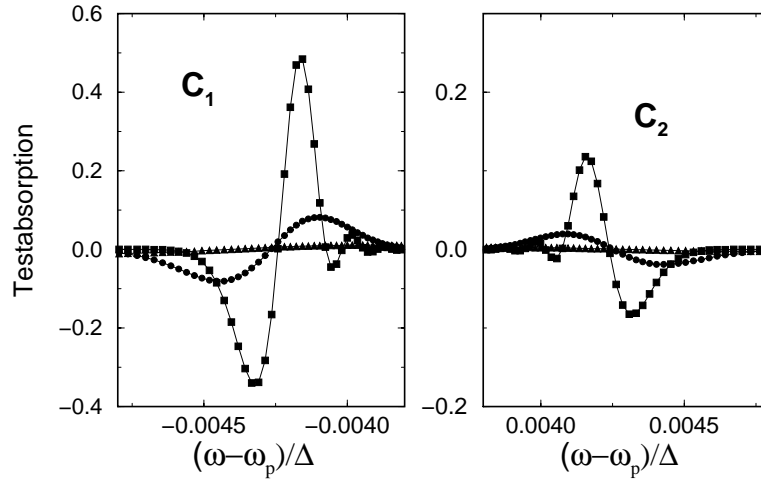


Abbildung 2.7: Testabsorption für gequetschte Pumpfelder nahe der Pumpfrequenz; Dreiecke:  $\xi = -1$ , Kreise:  $\xi = 0$ , Quadrate:  $\xi = 1$ . Weitere Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ .

gilt für den verstärkenden Bereich  $B$ .

Außer den Resonanzen bei  $A$  und  $B$  treten für den Fall des quantisierten Pumpfeldes zwei weitere Gruppen von Resonanzen nahe der Pumpfrequenz  $\omega_p$  auf. Diese sind in Abb. 2.7 gezeigt und mit  $C_1$  und  $C_2$  bezeichnet. Die Frequenzachse ist hier gegenüber Abb. 2.6 stark gestreckt worden. Die Resonanzen bei  $C_1$  und  $C_2$  hängen ebenfalls von der Photonenstatistik des Pumpfeldes ab, obwohl sie letztere nicht direkt widerspiegeln. Die Resonanzen bei  $C_1$  und  $C_2$  haben kein Analogon bei klassischer Behandlung des Pumpfeldes.

Die in Abb. 2.6 und Abb. 2.7 gezeigten Resonanzen lassen sich mit Hilfe der ‘Dressed States’ interpretieren. Da hier ein einzelnes TLS betrachtet wird, werden jeweils zwei ‘Bare States’  $\{|n; m = -\frac{1}{2}\rangle, |n+1; m = +\frac{1}{2}\rangle\}$  durch den Hamiltonian  $\mathcal{H}_0$  in (2.5) gekoppelt. Die Energieaufspaltung der beiden Zustände wird im ungekoppelten Fall ( $g = 0$ ) durch die Pumpverstimmung  $\Delta$  gegeben. Im gekoppelten Fall ( $g \neq 0$ ) sind die entsprechenden Eigenzustände durch die ‘Dressed States’  $\{|\mu_1, k = n\rangle, |\mu_2, k = n\rangle\}$  gegeben, die gegenüber den ‘Bare States’ um die ( $n$ -abhängigen) Energiedifferenzen

$$\Delta\epsilon_n = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{4g^2n + \Delta^2} - \Delta) \quad (2.37)$$

verschoben sind

In Abb. 2.8 sind zwei Paare von ‘Dressed States’ auf der rechten Seite gezeigt. Die entsprechenden ‘Bare States’ befinden sich auf der linken Seite. Die Aufspaltung eines Paares von ‘Dressed States’ wird durch die  $n$ -abhängige verallgemeinerte Rabi-Frequenz  $\Omega_n = \sqrt{4g^2n + \Delta^2}$  gegeben. Die eingezeichneten Übergänge zwischen den ‘Dressed States’ korrespondieren mit den jeweiligen Resonanzen in



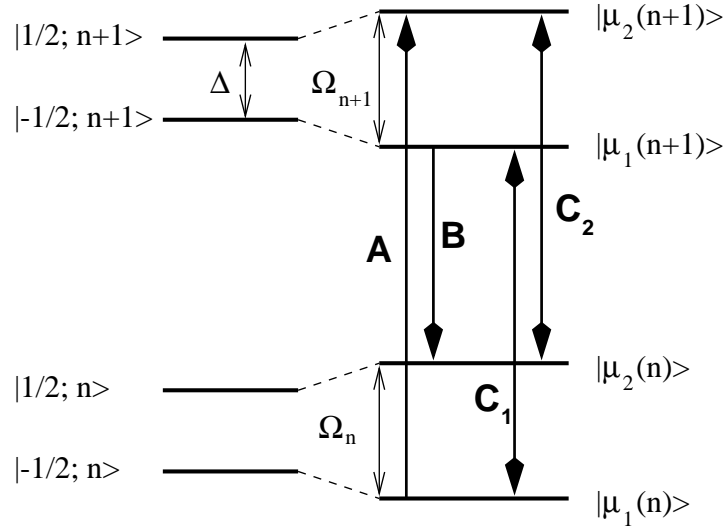


Abbildung 2.8: ‘Dressed States’ für ein Zwei-Niveau-System (TLS).

Abb. 2.6 und Abb. 2.7. Aufgrund der  $n$ -abhängigen Aufspaltung der ‘Dressed States’ tritt jeweils anstelle einer Resonanzlinie eine Schar von Resonanzlinien für einen jeweiligen Bereich ( $A, B, C_1, C_2$ ) auf.

Für die angenommene positive Pumpverstimmung  $\Delta$  und den Anfangszustand  $|g\rangle$  des TLS ist der untere ‘Dressed State’ eines Paares stärker besetzt als der obere. Die gesamte Besetzung eines Paares von ‘Dressed States’ bezüglich der Anregungszahl  $n$  wird durch die Photonenstatistik  $p_n$  gegeben. Folglich führt der eingezeichnete Übergang  $A$  zu einer Absorption des Testfeldes, während der Übergang  $B$  dessen Verstärkung bewirkt. Der Übergang  $B$  trägt deshalb verglichen mit Übergang  $A$  mit kleinerem Gewicht zum Spektrum bei, da das Übergangsmatrielement hier wesentlich kleiner ist. Die ‘Dressed States’, die den Übergängen  $C_1$  und  $C_2$  entsprechen, sind sehr ähnlich besetzt. Je nach Vorzeichen der Besetzungsdifferenz kann hier eine Verstärkung oder Absorption des Testfeldes erfolgen.

Mit wachsender Pumpverstimmung  $\Delta$  nähert sich die Besetzung des unteren ‘Dressed State’ eines Paares zur Anregungszahl  $n$  der Photonenstatistik  $p_n$ . Deshalb spiegelt für eine ausreichend große Pumpverstimmung  $\Delta$ , die hier in der Größenordnung der (mittleren) Rabi-Frequenz  $\Omega$  gewählt ist, die Einhüllende der Resonanzen bei  $A$  die Photonenstatistik nahezu direkt wider.

Neben den gequetschten Zuständen läßt sich mit dem Pump-Test-Experiment auch die Photonenstatistik der Laseremission in Abhängigkeit vom Pumpparameter des Lasers untersuchen. In einem einfachen Laser-Modell wird die Photonenstatistik des Laserlichtes gegeben durch [45]

$$p_n = \frac{(r\beta)^n}{(\beta + n)!} p_0. \quad (2.38)$$

Dabei ist  $r$  der Pumpparameter des Lasers, der die Pumprate relativ zur Laser-

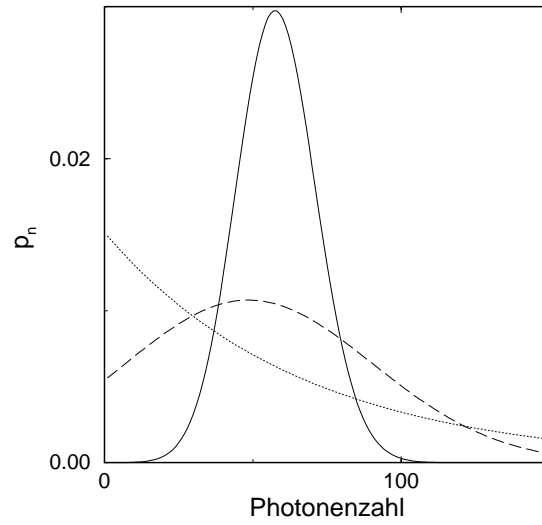


Abbildung 2.9: Photonenstatistik der Laseremission für unterschiedliche Pumpparameter. Durchgezogene Kurve:  $r = 1,5$ ; gestrichelte Kurve:  $r = 1,03$ ; gepunktete Kurve:  $r = 0,98$ ; mittlere Photonenzahl:  $\langle n \rangle = 100$ .

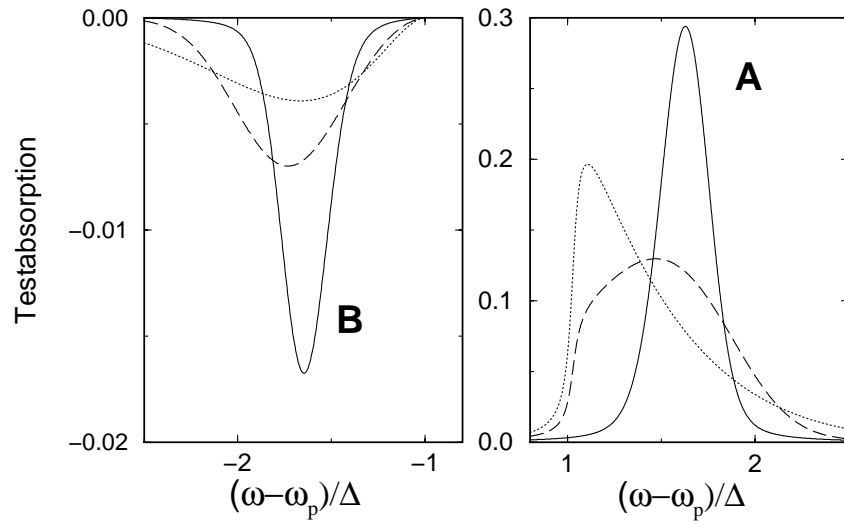


Abbildung 2.10: Testabsorptionsspektren für die Photonenstatistik der Laseremission aus Abb. 2.9. Parameter:  $N = 1$ ,  $\Delta = 12g$ . Es ist eine homogene Verbreiterung von  $\gamma = 0,4g$  angenommen worden.

schwelle angibt. Der dimensionslose Parameter  $\beta$  hängt von den Zerfallsraten des oberen und unteren Laserniveaus ab. Ist der Pumpparameter  $r$  wesentlich größer als Eins, so wird die Photonenstatistik durch eine Poissonverteilung gegeben, während bei kleinem  $r$  sich die Statistik einer thermischen Verteilung nähert. In Abb. 2.9 ist die Photonenstatistik der Laseremission für drei unterschiedliche Pumpparameter  $r$  gezeigt. Dabei entspricht die durchgezogene Kurve einem Laser, der deutlich oberhalb seiner Schwelle betrieben wird ( $r = 1,5$ ), die gestrichelte Kurve einem Laser, der knapp oberhalb seiner Schwelle betrieben wird ( $r = 1,03$ ) und die gepunktete Kurve einem Laser, der unterhalb der Schwelle betrieben wird ( $r = 0,98$ ).

Die entsprechenden Testabsorptionsspektren im optischen Stark-Effekt sind in Abb. 2.10 gezeigt. Im absorbierenden Bereich  $A$  spiegelt sich die Photonenstatistik der Laseremission direkt wider. Im verstärkenden Bereich  $B$  gilt dies allerdings nur für den Laser, der oberhalb der Schwelle betrieben wird. Für eine Photonenstatistik, bei der kleine Photonenzahlen dominieren, entspricht die Linienform im verstärkenden Bereich  $B$  nicht mehr direkt der Photonenstatistik. Für die Photonenstatistik unterhalb der Laserschwelle ist die Linienform im Bereich  $B$  stark abgerundet. Der Grund hierfür ist, daß die Matrixelemente für die Übergänge  $B$  hin zu sehr kleinen Photonenzahlen stark abnehmen.

Beim experimentellen Nachweis der  $r$ -Abhängigkeit der Photonenstatistik in der Laseremission tritt das Problem auf, daß bei den zu erwartenden geringen Intensitäten unterhalb der Pumpschwelle eine optische Stark-Verschiebung nur noch schwer nachweisbar ist. Hier bietet das gequetschte Licht den Vorteil, daß es sich auch mit größeren Intensitäten erzeugen läßt [48].

Der Nachweis des optischen Stark-Effekts in einem Pump-Test-Experiment bietet insgesamt die Möglichkeit zur direkten Messung der Photonenstatistik. Dies ist gegenüber der Homodynmesung ein Vorteil, da dort die Photonenstatistik nur indirekt aus den Daten der Quantentomographie bestimmt wird.

### 2.3.3 Testabsorption für das Dicke-Modell

Die Untersuchungen des vorangegangenen Teilabschnitts werden nun auf den Fall von mehreren TLS ( $N > 1$ ) erweitert (Dicke-Modell) [55]. Zunächst soll der einfachste Fall von zwei TLS ( $N = 2$ ) betrachtet werden. In Abb. 2.11 ist das Testabsorptionsspektrum für zwei TLS und ein kohärentes Pumpfeld gezeigt, wobei jeder Punkt die Lage und Höhe einer Resonanzlinie kennzeichnet.

Verglichen mit den Ergebnissen des Jaynes-Cummings-Modells ( $N = 1$ ) treten hier zwei bemerkenswerte Zusatzeffekte auf. Erstens bestehen die Resonanzen in den Bereichen  $A$  und  $B$  aus jeweils zwei Untergruppen von Resonanzen unterschiedlicher Höhe, die im 'Inset' von Abb. 2.11 mit  $A_1$  und  $A_2$  bezeichnet sind. Als Folge würde eine starke Variation der Testabsorption bei kleinen Änderungen der Testfrequenz auftreten. Die Einhüllende der Resonanzen bei  $A$  spiegelt weiterhin die Poissonstatistik des kohärenten Pumpfeldes wider. Zweitens treten

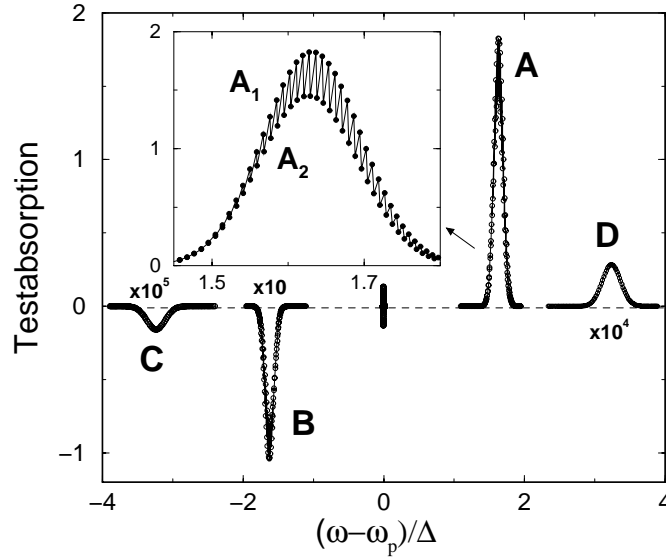


Abbildung 2.11: Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld für  $N = 2$ . Weitere Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ .

sehr kleine zusätzliche Resonanzen auf, die in Abb. 2.11 mit  $C$  und  $D$  bezeichnet sind. Diese Resonanzen sind um mehr als eine Pumpverstimmung  $\Delta$  gegenüber den Resonanzen bei  $A$  bzw.  $B$  blau- bzw. rotverschoben.

Mit Hilfe der ‘Dressed States’ für zwei TLS können die Unterstrukturen und die zusätzlichen Resonanzen interpretiert werden. Für den Fall, daß sich die TLS zu Beginn in ihrem Grundzustand  $|g\rangle$  befinden, werden jeweils drei ‘Bare States’ gleicher Anregungszahl gekoppelt, nämlich  $\{|n, m = -1\rangle, |n - 1, m = 0\rangle, |n - 2, m = 1\rangle\}$ , wobei der Abstand zwischen den ‘Bare States’ für  $g = 0$  durch die Pumpverstimmung  $\Delta$  gegeben ist. Die drei daraus resultierenden ‘Dressed States’  $\{|\mu_1, k = n\rangle, |\mu_2, k = n\rangle, |\mu_3, k = n\rangle\}$  sind gegenüber den ‘Bare States’ aufgrund des optischen Stark-Effekts verschoben.

In Abb. 2.12 sind auf der rechten Seite zwei energetisch benachbarte Triplets von ‘Dressed States’ dargestellt. Auf der linken Seite sind die entsprechenden ‘Bare States’ eingezeichnet. Die Übergänge korrespondieren mit den jeweiligen Resonanzbereichen in Abb. 2.11.

Da in Abb. 2.11 eine positive Pumpverstimmung  $\Delta$  von der Größenordnung der (mittleren) Rabi-Frequenz  $\Omega$  angenommen wurde, folgt für die Besetzungsverteilung innerhalb eines Triplets von ‘Dressed States’, daß der untere Zustand stärker besetzt ist als der mittlere und dieser wiederum stärker besetzt ist als der obere. Folglich führt der in Abb. 2.12 eingezeichnete Übergang  $A_1$  zu einer stärkeren Absorption als der Übergang  $A_2$ . Da die Übergangsfrequenzen für die beiden Übergänge sehr ähnlich sind, entstehen auf diese Weise eng benachbarte Resonanzen sehr unterschiedlicher Höhe im Bereich  $A$ . Analog lassen sich die Unterstrukturen der Resonanzen bei  $B$  erklären.

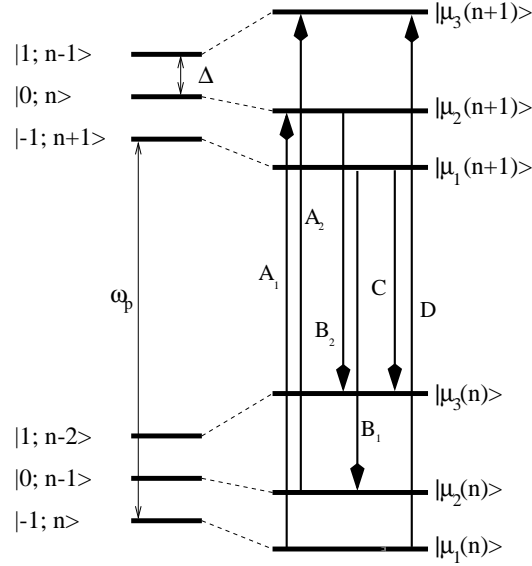


Abbildung 2.12: ‘Dressed States’ für  $N = 2$ .

Die zusätzlichen Resonanzen bei  $C$  und  $D$  folgen aus der größeren Zahl der ‘Dressed States’ innerhalb eines Multipletts und der damit verbundenen größeren Zahl von möglichen Übergängen. Die Besetzungsverteilung innerhalb eines Triplets erklärt, warum die Resonanzen bei  $C$  zu einer Testfeldverstärkung führen, während die Resonanzen bei  $D$  das Testfeld absorbieren. Die geringe Höhe der Resonanzen bei  $C$  und  $D$  rührt von den kleinen Übergangsmatrixelementen her.

Wird die Pumpverstimung  $\Delta$  wesentlich kleiner als die (mittlere) Rabi-frequenz  $\Omega$  gewählt, so können sich die Besetzungsverhältnisse innerhalb eines Multipletts von ‘Dressed States’ dramatisch ändern. Für den Fall  $N = 2$  nimmt die Besetzung des unteren ‘Dressed State’ innerhalb eines Triplets mit der Pumpverstimung  $\Delta$  ab, während die des mittleren ‘Dressed State’ anwächst. Dies ist in Abb. 2.13 wiedergegeben, wo die Besetzungen des mittleren ‘Dressed State’ (durchgezogene Linie) und des unteren ‘Dressed State’ (gestrichelte Linie) in Abhängigkeit von der Pumpverstimung  $\Delta$  gezeigt sind. Die Gesamtbesetzung des betrachteten Triplets wurde dabei auf Eins normiert. Bemerkenswert ist, daß die Besetzungsdifferenz zwischen dem unterem und dem mittleren ‘Dressed State’ bei kleiner Pumpverstimungen  $\Delta$  das Vorzeichen wechselt. Dies hat Konsequenzen für die Anordnung der Untergruppen im Bereich  $A$  der Testabsorption. In Abb. 2.14 ist dazu die Testabsorption für unterschiedliche Pumpverstimungen  $\Delta$  gezeigt. Hier kennzeichnen Kreise Resonanzen entsprechend dem Übergang  $A_1$  in Abb. 2.12, während Dreiecke Resonanzen entsprechend dem Übergang  $A_2$  markieren. Mit sinkender Pumpverstimung wandern die beiden Untergruppen durcheinander hindurch (vgl. Abb. 2.14.b und Abb. 2.14.c), bis die Resonanzen der Untergruppe  $A_1$  schließlich das Testfeld verstärken (Abb. 2.14.a).

Mit steigender Zahl  $N$  der TLS wächst die Komplexität des Schemas der

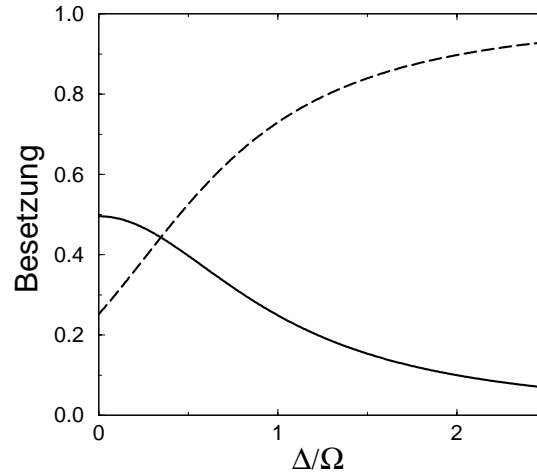


Abbildung 2.13: Besetzung der ‘Dressed States’ innerhalb des Triplets mit  $n = 60$  für zwei TLS ( $N = 2$ ) in Abhängigkeit von  $\Delta$ . Gestrichelte Kurve: Besetzung des unteren ‘Dressed State’; durchgezogene Kurve: Besetzung des mittleren ‘Dressed State’.

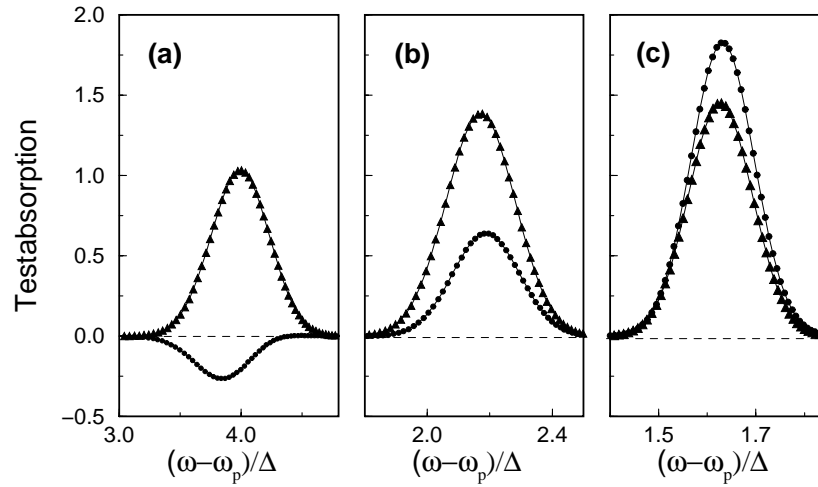


Abbildung 2.14: Testabsorption für  $N = 2$  (Bereich A) für unterschiedliche Pumpverstimungen: (a)  $\Delta = 4g$ , (b)  $\Delta = 8g$ , (c)  $\Delta = 12g$ . Kreise: Resonanzen zur Untergruppe  $A_1$ , Dreiecke: Resonanzen zur Untergruppe  $A_2$ . Weitere Parameter:  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\xi = 0$ .

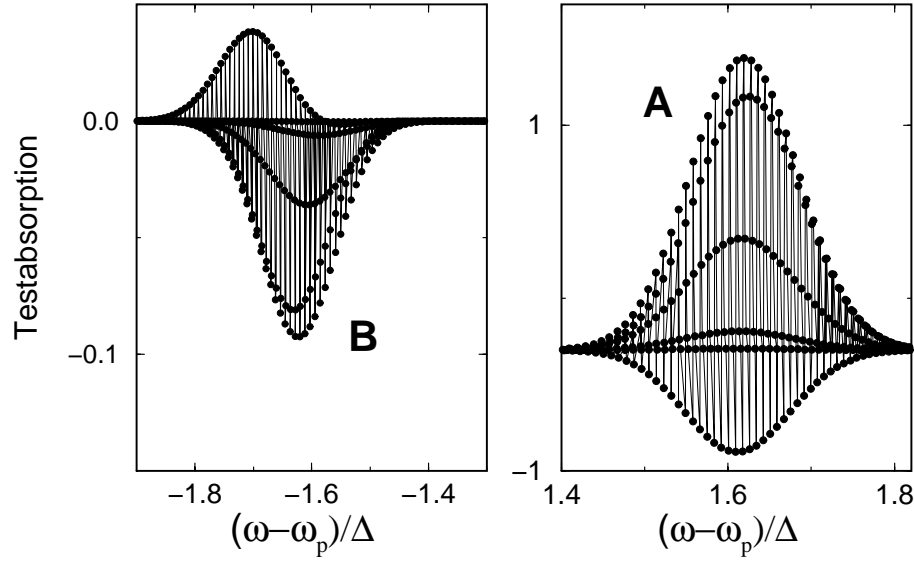


Abbildung 2.15: Testabsorption für sechs Zwei-Niveau-Systeme. Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\xi = 0$ .

‘Dressed States’ an. Der Grund hierfür ist, daß die Zahl der jeweils gekoppelten ‘Bare States’ durch  $2N + 1$  gegeben wird ( $n > N$  vorausgesetzt) und demnach die Zahl der ‘Dressed States’ innerhalb eines Multipletts mit  $N$  anwächst. Als Folge wächst die Zahl der Untergruppen von Resonanzen in den Bereichen  $A$  und  $B$  mit  $N$  an. In Abb. 2.15 ist beispielsweise die Testabsorption in den Bereichen  $A$  und  $B$  für sechs TLS ( $N = 6$ ) gezeigt. Es treten jeweils sechs Untergruppen von Resonanzen auf. Im Bereich  $A$  verstärkt dabei eine Untergruppe sogar das Testfeld, während im verstärkenden Bereich  $B$  das Testfeld von einer Untergruppe von Resonanzen absorbiert wird. Die Einhüllende der Resonanzen im Bereich  $A$  spiegelt die angenommene Poissonstatistik des Pumpfeldes wider.

Die Messung der Unterstrukturen erfordert eine große spektrale Auflösung, die experimentell aufgrund homogener und inhomogener Verbreiterung in der Regel schwer erreichbar ist. In den folgenden Betrachtungen wird deshalb eine homogene Verbreiterung  $\gamma$  für die Resonanzen angenommen, die so groß ist, daß nur noch die Einhüllende der Resonanzen in den Spektren erscheint. Diese Einhüllende spiegelt dann für den Fall einer Pumpverstimmung in der Größenordnung der (mittleren) Rabifrequenz die Photonenstatistik des Pumpfeldes wider.

### 2.3.4 Nichtklassische Verstärkung

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll ein weiterer Effekt diskutiert werden, der an die quantisierte Beschreibung des Pumpfeldes gebunden ist. In Abb. 2.16.a wird der Bereich  $A$  der Testabsorptionsspektren für unterschiedlich gequetschte Pumpfelder und für zehn TLS ( $N = 10$ ) gezeigt. Im Unterschied zur bisherigen

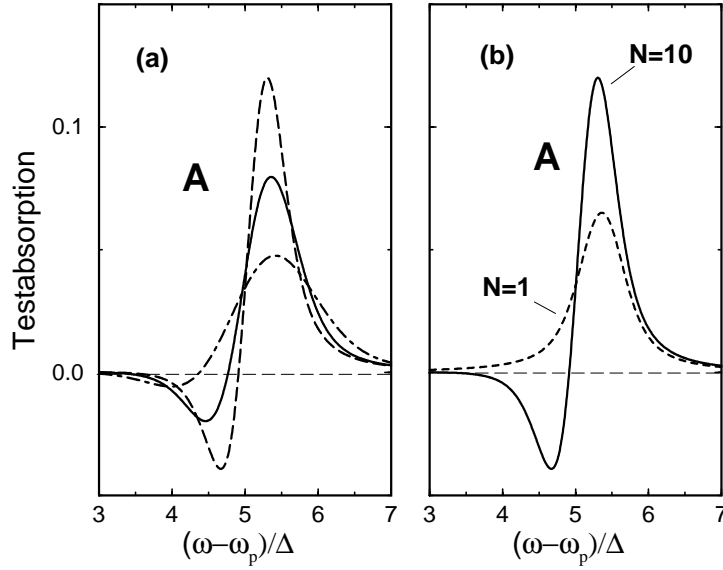


Abbildung 2.16: (a) Testabsorption mit nichtklassischer Verstärkung für zehn TLS und unterschiedlich gequetschte Pumpfelder. Gestrichelte Kurve:  $\xi = 0, 5$ ; durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ ; strichpunktierte Kurve:  $\xi = -0, 5$ . (b) Testabsorption für zwei unterschiedliche Zahlen  $N$  von TLS für  $\xi = 0, 5$ . Weitere Parameter:  $\Delta = 3g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0, 8g$ .

Diskussion wurde hier eine Pumpverstimmung  $\Delta$  angenommen, die wesentlich kleiner als die mittlere Rabi Frequenz  $\Omega$  ist. Aufgrund der angenommenen homogenen Verbreiterung von  $\gamma = 0, 8g$  sind die Unterstrukturen nicht mehr aufgelöst.

Bemerkenswert ist, daß innerhalb der Resonanzen bei  $A$  eine Verstärkung auftritt. Da diese Verstärkung bei klassischer Behandlung des Pumpfeldes nicht auftreten würde, wird sie als nichtklassische Verstärkung bezeichnet. Die Linienform hängt auch im Bereich der nichtklassischen Verstärkung von der gequetschten Photonenstatistik des Pumpfeldes ab, obschon letztere nicht direkt widergespiegelt wird.

Der Effekt der nichtklassischen Verstärkung hängt stark von der Zahl  $N$  der TLS ab. In Abb. 2.16.b ist der Bereich  $A$  der Testabsorption für zwei unterschiedliche Zahlen  $N$  von TLS gezeigt. Während im Fall von zehn TLS ein deutlicher nichtklassischer Verstärkungseffekt auftritt, ist im Falle von einem TLS keine Verstärkung zu erkennen. Der nichtklassische Verstärkungseffekt würde bei  $N = 1$  erst bei einer wesentlich kleineren Pumpverstimmung  $\Delta$  einsetzen.

### 2.3.5 Zusammenfassung von Abschnitt 2.3

- In dem diskutierten Pump-Test-Experiment spiegelt die Linienform der blauverschobenen Testabsorption (Bereich A) die Photonenstatistik des gequetschten Pumpfeldes wider, wenn die Pumpverstimmung in der Größen-



ordnung der Rabifrequenz gewählt wird.

- Für mehr als ein TLS treten bei hoher Auflösung feine Unterstrukturen in den Spektren auf. Auch sind kleine zusätzliche Resonanzen zu erwarten.
- Für kleine Pumpverstimmungen tritt eine Verstärkung innerhalb der blauverschobenen Resonanz auf. Diese nichtklassische Verstärkung wird durch kollektive Effekte zwischen den TLS erheblich beeinflußt.

## 2.4 Das phasenempfindliche Absorptionsspektrum

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Testabsorption für den Fall untersucht, daß sich die TLS zu Beginn in ihrem Grundzustand  $|g\rangle$  befinden. Die Linienform im optischen Stark-Effekt hängt dann nur von den Diagonalelementen der Dichtematrix des Pumpfeldes ab, sprich von seiner Photonenstatistik. In diesem Abschnitt sollen Anfangszustände der TLS betrachtet werden, bei denen Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix der TLS  $\rho^{(TLS)}$  nicht verschwinden. Nach den Gleichungen (2.20) und (2.21) hängt dann die effektive Besetzung  $f_{\mu,k}$  und mit dieser die Testabsorption auch von Nichtdiagonalelementen der Dichtematrix des Pumpfeldes  $\rho^{(f)}$  ab. Die Nichtdiagonalelemente von  $\rho^{(f)}$  charakterisieren unter anderem Phaseneigenschaften des quantisierten Pumpfeldes. Das Testabsorptionsspektrum im optischen Stark-Effekt wird somit phasenempfindlich.

Die Nichtdiagonalelemente von  $\rho^{(TLS)}$  lassen sich mit Hilfe eines resonanten Präparationspulses optisch anregen. Durch geeignete Wahl der Dauer und Intensität des Pulses lassen sich die verschiedensten kohärenten Superpositionszustände herstellen. Die Anregung von Nichtdiagonalelementen von  $\rho^{(TLS)}$  ist gleichbedeutend mit der Erzeugung einer Polarisation, welche ohne Wechselwirkung mit Pump- oder Testfeld mit der Übergangsfrequenz  $\omega_e - \omega_g$  oszilliert. Die Phase dieser Oszillation relativ zur Phase des Pumpfeldes läßt sich durch eine definierte Zeitverzögerung zwischen dem Präparationspuls und dem Pumpfeld steuern. Ein solches Verfahren ist in der Literatur auch als ‘Coherent Control’ bekannt [56, 57].

### 2.4.1 Die phasenempfindliche Testabsorption für das Jaynes-Cummings-Modell

Die phasenempfindlichen Effekte sollen in diesem Teilabschnitt für den Fall eines TLS (Jaynes-Cummings-Modell) erläutert werden. Es wird ein Anfangszustand wie in (2.21) angenommen, wobei für die Dichtematrix des TLS  $\rho^{(TLS)}$  gilt:

$$\begin{aligned} \rho^{(TLS)} &= |\phi\rangle\langle\phi|, \\ \text{mit} \quad |\phi\rangle &= c_- |g\rangle + c_+ |e\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Zunächst wird die Testabsorption für die beiden Anfangszustände  $|\phi\rangle_{\pm}$  mit

$$|\phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e\rangle) \quad (2.40)$$

untersucht. Der blauverschobene Bereich der Testabsorption (Bereich A) ist für die beiden Anfangszustände  $|\phi\rangle_{\pm}$  in Abb. 2.17 gezeigt. Es wurde ein amplitudengequetschtes Pumpfeld angenommen. Abhängig von der Phase der kohärenten

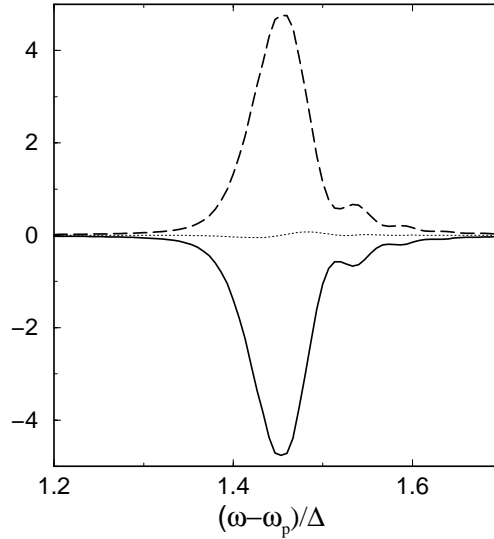


Abbildung 2.17: Testabsorption für die Anfangszustände  $|\phi\rangle_+$  (durchgezogene Kurve) und  $|\phi\rangle_-$  (gestrichelte Kurve). Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 40$ ,  $\xi = 1, 2$ ,  $\gamma = 0, 1g$ . Die gepunktete Kurve zeigt das Spektrum, bei dem künstlich die Nichtdiagonalelemente des Pumpfeldes auf Null gesetzt wurden.

Superposition kommt es zu einer Absorption (gestrichelte Kurve) oder zu einer Verstärkung (durchgezogene Kurve) des Testfeldes. In der Linienform werden die charakteristischen Satelliten der amplitudengequetschten Photonenstatistik sichtbar (vgl. dazu Abb. 2.4.b). Es ist jedoch zu beachten, daß die Testabsorption in Abb. 2.17 fast ausschließlich durch die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix des Pumpfeldes  $\rho^{(f)}$  bestimmt wird. Um dies zu zeigen, wurden in einer weiteren Berechnung der Testabsorption die Nichtdiagonalelemente von  $\rho^{(f)}$  künstlich auf Null gesetzt. Es ergibt sich für beide Anfangszustände die gepunktete Kurve in Abb. 2.17, die bis auf kleine Oszillationen im wesentlichen eine Nulllinie darstellt.

Das phasensensitive Verhalten läßt sich mit Hilfe der ‘Dressed States’ interpretieren. Da der Fall  $N = 1$  betrachtet wird, koppeln je zwei ‘Bare States’ zu einem Paar von ‘Dressed States’ (siehe dazu Abb. 2.8). Dabei stellt der obere ‘Dressed State’ eines Paares eine kohärente Überlagerung der ‘Bare States’ dar, bei der die Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben. Beim unteren ‘Dressed State’ haben die Koeffizienten ein entgegengesetztes Vorzeichen. Da für den Anfangszustand  $|\phi\rangle_+$  des TLS die Koeffizienten der kohärenten Überlagerung das gleiche Vorzeichen haben, ist der obere ‘Dressed State’ eines Paares hier stärker besetzt als der untere wie es in Abb. 2.18.a skizziert ist. Der eingezeichnete Übergang  $A$  führt zu einer Verstärkung des Testfeldes. Für den Anfangszustand  $|\phi\rangle_-$  läßt sich das analoge Argument benutzen. Da hier die Koeffizienten mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten, ist der untere ‘Dressed State’ eines Paares stärker besetzt als der obere (Abb. 2.18.b). Der eingezeichnete Übergang  $A$  führt

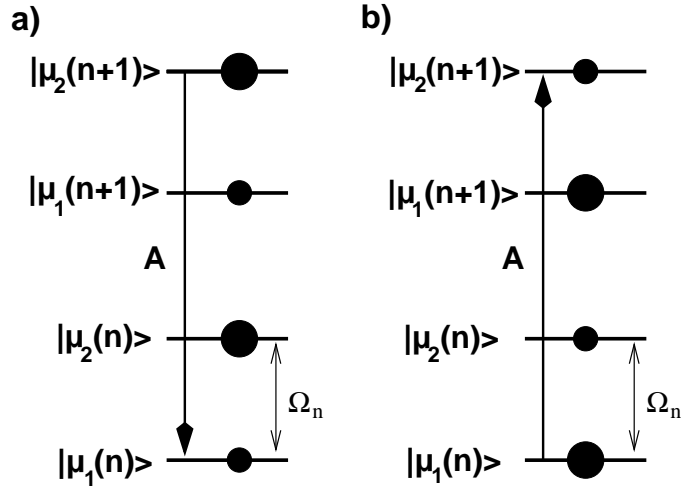


Abbildung 2.18: Dressed-State-Schema zur Interpretation der Spektren in Abb. 2.17. Die Kreise deuten die Besetzungen der ‘Dressed States’ für die Anfangszustände (a)  $|\phi\rangle_+$  und (b)  $|\phi\rangle_-$  an.

zu einer Absorption des Testfeldes. Die Vorzeichen der Resonanzen in Abb. 2.17 lassen sich auf diese Weise verstehen.

Im folgenden werden die phasenempfindlichen Effekte in Abhängigkeit von der Inversion des Anfangszustands untersucht. Die betrachteten Anfangszustände sind von der Form

$$|\phi\rangle_{\pm} = |c_+||e\rangle \pm |c_-||g\rangle. \quad (2.41)$$

Der Erwartungswert der Inversion dieser Anfangszustände wird gegeben durch

$$\langle J_3 \rangle = \frac{1}{2}(|c_+|^2 - |c_-|^2). \quad (2.42)$$

Abb. 2.19 und Abb. 2.20 zeigen in Abhängigkeit von der Inversion der Anfangszustände  $|\phi\rangle_+$  und  $|\phi\rangle_-$  den blauverschobenen Bereich der Testabsorption (Bereich A). Das Pumpfeld wurde in einem amplitudengequetschten Zustand angenommen.

Für den Anfangszustand  $|\phi\rangle_+$  geht mit steigender Inversion die absorbierende Resonanz in eine verstärkende über (Abb. 2.19). Bemerkenswert ist hier, daß die Verstärkung des Testfeldes bereits deutlich unterhalb der Inversion Null einsetzt. Für den Anfangszustand  $|\phi\rangle_-$  wächst zunächst die absorbierende Resonanz mit steigender Inversion, um dann bei einer Inversion oberhalb der Null wieder abzufallen und in eine verstärkende Resonanz überzugehen (Abb. 2.20). Dieses Verhalten widerspricht der Intuition, da eigentlich mit steigender Inversion ein Ausbleichen der Testabsorption zu erwarten ist.

In beiden Fällen, sowohl bei  $|\phi\rangle_+$  als auch bei  $|\phi\rangle_-$ , gibt die Linienform der Testabsorption die charakteristischen Satelliten der amplitudengequetschten Photonstatistik des Pumpfeldes wieder.

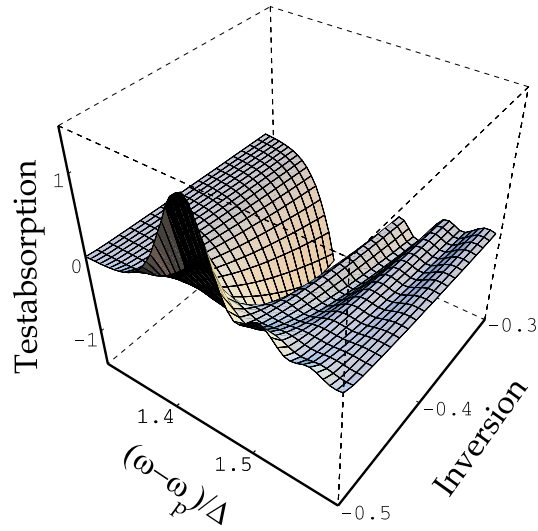


Abbildung 2.19: Testabsorption in Abhängigkeit von der Inversion des Anfangszustands  $|\phi\rangle_+$ . Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 40$ ,  $\xi = 1, 5$ ,  $\gamma = 0, 1g$ .

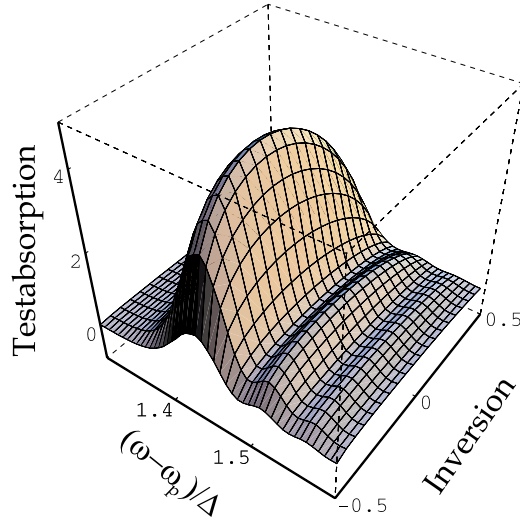


Abbildung 2.20: Testabsorption in Abhängigkeit von der Inversion des Anfangszustands  $|\phi\rangle_-$ . Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 40$ ,  $\xi = 1, 5$ ,  $\gamma = 0, 1g$ .

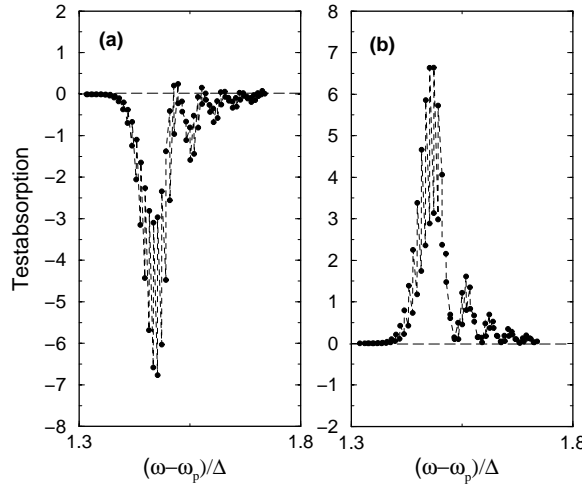


Abbildung 2.21: Testabsorption für die Anfangszustände (a)  $|\phi\rangle_+$  und (b)  $|\phi\rangle_-$  für  $N = 2$  aus (2.43). Parameter:  $\Delta = 12g$ ,  $\langle n \rangle = 44$ ,  $\xi = 1, 5$ .

### 2.4.2 Die phasensensitive Testabsorption für das Dicke-Modell

Im Fall des Dicke-Modells ( $N > 1$ ) treten ähnliche phasensensitive Effekte auf, wie sie im vorangegangenen Teilabschnitt für das Jaynes-Cummings-Modell diskutiert wurden. Wird eine hohe spektrale Auflösung angenommen, so erscheinen die aus Abb. 2.11 bereits bekannten Unterstrukturen im Testabsorptionsspektrum. Es soll dazu der Fall zweier TLS ( $N = 2$ ) betrachtet werden. Die Anfangszustände  $|\phi\rangle_{\pm}$  der TLS, die zu denen aus (2.40) analog sind, lassen sich in der Basis der Drehimpulszustände  $\{|j, m\rangle\}$  schreiben als

$$|\phi\rangle_{\pm} = \frac{1}{2}(|j = 1, m = -1\rangle \pm \sqrt{2}|j = 1, m = 0\rangle + |j = 1, m = 1\rangle). \quad (2.43)$$

In Abb. 2.21 ist die durch den optischen Stark-Effekt blauverschobene Testabsorption (Bereich A) für die beiden Anfangszustände  $|\phi\rangle_{\pm}$  gezeigt, wobei wieder ein amplitudengequetschtes Pumpfeld angenommen wurde. Jedes Symbol markiert hier die Lage und Höhe einer Resonanzlinie.

Analog zu Abb. 2.17 führt der Anfangszustand  $|\phi\rangle_+$  zu einer Verstärkung (siehe Abb. 2.21.a), während der Anfangszustand  $|\phi\rangle_-$  zu einer Absorption führt (siehe Abb. 2.21.b). Zudem sind analog zu Abb. 2.11 zwei Untergruppen von Resonanzen unterschiedlicher Höhe erkennbar, die sowohl im Fall der Verstärkung als auch der Absorption auftreten. Die Einhüllenden der Resonanzen spiegeln charakteristische Satelliten der amplitudengequetschten Photonenstatistik des Pumpfeldes wider.

### 2.4.3 Zusammenfassung von Abschnitt 2.4

- Mit Hilfe eines Präparationspulses lassen sich phasenempfindliche Anfangszustände herstellen. Im optischen Stark-Effekt spielen dann die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix des Pumpfeldes eine wichtige Rolle.
- Die Testabsorption hängt für die Anfangszustände  $|\phi\rangle_{\pm}$  aus (2.40) fast ausschließlich von den Nichtdiagonalelementen der Dichtematrix des Pumpfeldes ab. Phasenabhängig wird im blauverschobenen Resonanzbereich des Spektrums das Testfeld verstärkt bzw. absorbiert.
- Phasenempfindliche Effekte können zu einer Verstärkung des Testfeldes unterhalb der Anfangsinversion Null führen.
- Phasenempfindliche Effekte können dazu führen, daß die absorbierende Resonanz mit steigender Anfangsinversion anwächst anstatt auszubleichen.
- Im Fall von mehr als einem TLS entstehen auch bei phasenempfindlichen Anfangszuständen Unterstrukturen in den Resonanzen.

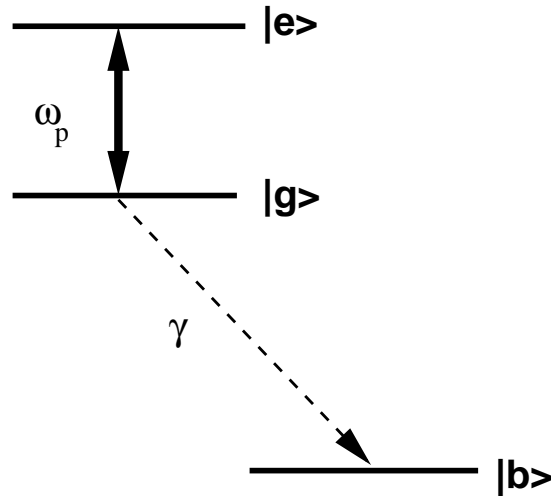


Abbildung 2.22: Drei-Niveau-System für die Autler-Townes-Spektroskopie.

## 2.5 Alternative spektroskopische Methoden zur Zustandsmessung eines quantisierten Strahlungsfeldes

In den vorangehenden Abschnitten wurde gezeigt, daß ein Pump-Test-Experiment zum Nachweis des optischen Stark-Effekts die Möglichkeit bietet, Eigenschaften des Quantenzustands eines Strahlungsfeldes spektroskopisch zu messen. Neben dem Pump-Test-Experiment ermöglichen auch verwandte spektroskopische Verfahren eine solche Messung.

Zwei dieser alternativen spektroskopischen Methoden sollen in diesem Abschnitt kurz beschrieben werden. Es sind zum ersten die Autler-Townes-Spektroskopie und zum zweiten der Nachweis des Spektrums der Resonanzfluoreszenz. Da die Messung des Quantenzustands eines Strahlungsfeldes in den beiden Verfahren ebenfalls auf dem optischen Stark-Effekt basiert, stehen sie in engem Zusammenhang mit dem bisher diskutierten Pump-Test-Experiment.

### 2.5.1 Autler-Townes-Spektroskopie

Der Vorschlag, den Zustand eines Quantensystems mit Hilfe von Autler-Townes-Spektroskopie nachzuweisen, geht auf M. S. Zubairy zurück [58, 59]. Die Autler-Townes-Spektroskopie erfordert ein Drei-Niveau-System, beispielsweise eines mit kaskadierter Niveaueinordnung, wie es in Abb. 2.22 gezeigt ist.

Es wird angenommen, daß das System durch optische Anregung in den Anfangszustand  $|g\rangle$  präpariert wird. Auf dem Übergang  $\{|g\rangle \longleftrightarrow |e\rangle\}$  wird ein monochromatisches Pumpfeld der Frequenz  $\omega_p$  resonant eingestrahlt. Nachgewiesen wird das Fluoreszenzspektrum, welches beim Spontanzerfall in das unterste



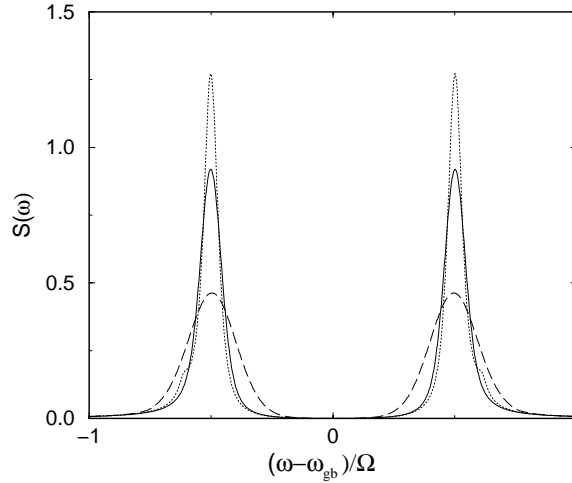


Abbildung 2.23: Autler-Townes-Spektrum für  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,4g$  für unterschiedlich gequetschte Pumpfelder. Gepunktete Kurve:  $\xi = 1$ ; gestrichelte Kurve:  $\xi = -1$ ; durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ .

Niveau  $|b\rangle$  entsteht. Die spontane Zerfallsrate auf dem Übergang  $\{|g\rangle \rightarrow |b\rangle\}$  wird mit  $\gamma$  bezeichnet.

Wird das Pumpfeld quantisiert behandelt, so ergibt sich für das Fluoreszenzspektrum der Ausdruck [58]

$$S(\omega) \propto \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\delta^2}{(g^2 n - \delta^2) + \delta^2 \gamma^2}. \quad (2.44)$$

Hier beschreibt  $g$  wiederum die Kopplung des Zwei-Niveau-Systems (TLS)  $\{|g\rangle \longleftrightarrow |e\rangle\}$  an das Pumpfeld.  $\delta = \omega - \omega_{gb}$  bezeichnet die Verstimmung der Nachweisfrequenz relativ zur Frequenz  $\omega_{gb}$  des Übergangs  $\{|g\rangle \rightarrow |b\rangle\}$ , der als Monitorübergang dient.  $p_n$  ist die Photonenzustatsstatistik des Pumpfeldes.

In Abb. 2.23 ist das Fluoreszenzspektrum für ein amplitudengequetschtes (gepunktete Kurve), ein phasengequetschtes (gestrichelte Kurve) und ein kohärentes Pumpfeld (durchgezogene Kurve) gezeigt. Das Spektrum besteht aus zwei Resonanzlinien, die gegenüber der ungestörten Frequenz des Monitorübergangs um die halbe mittlere Rabi-Frequenz  $\Omega = 2g\sqrt{\langle n \rangle}$  rot- bzw. blauverschoben sind. Die Verschiebung erfolgt aufgrund des optischen Stark-Effekts, der durch die Wechselwirkung des TLS  $\{|g\rangle \longleftrightarrow |e\rangle\}$  mit dem Pumpfeld verursacht wird. Die Linienform der verschobenen Resonanzen spiegelt die Photonenzustatsstatistik des Pumpfeldes direkt wider, wie der Vergleich mit Abb. 2.4.b zeigt.

Wird ein Anfangszustand präpariert, der aus einer kohärenten Überlagerung der Niveaus  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  besteht, so ist das Autler-Townes-Spektrum auch abhängig von Nichtdiagonalelementen der Dichtematrix des Pumpfeldes [59]. Dies ist in enger Analogie zu den in Abschnitt 2.4 diskutierten phasenempfindlichen Effekten im Pump-Test-Experiment zu sehen.

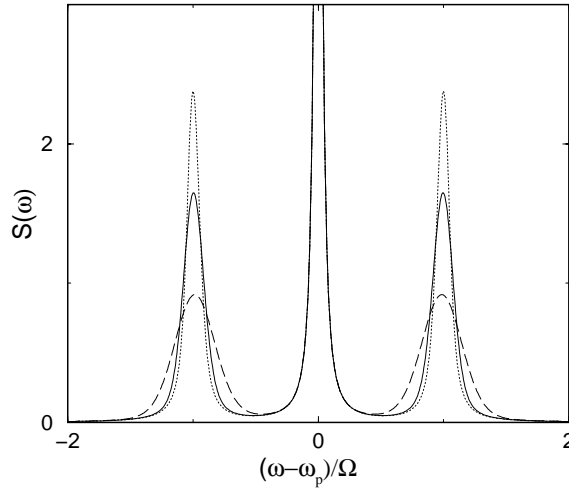


Abbildung 2.24: Spektrum der Resonanzfluoreszenz für unterschiedlich gequetschte Pumpfelder mit  $\langle n \rangle = 60$ . Gepunktete Kurve:  $\xi = 1$ ; gestrichelte Kurve:  $\xi = -1$ ; durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ . Es wurde eine phänomonologische homogene Verbreiterung von  $\gamma = 0,4g$  eingeführt.

### 2.5.2 Das Spektrum der Resonanzfluoreszenz

Als zweite alternative Methode, den Quantenzustand eines quantisierten Strahlungsfeldes spektroskopisch zu vermessen, soll der Nachweis des Spektrums der Resonanzfluoreszenz diskutiert werden. Dazu wird ein TLS mit den Zuständen  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  betrachtet, welches mit einem resonanten monochromatischen Pumpfeld der Frequenz  $\omega_p$  wechselwirkt. Die dadurch entstehende Resonanzfluoreszenz wird mit einem Spektrometer nachgewiesen.

Überschreitet die (mittlere) Rabifrequenz  $\Omega$  die spontane Zerfallsrate  $\gamma$  des oberen Niveaus  $|e\rangle$ , so besteht das Spektrum der Resonanzfluoreszenz aus drei Resonanzen, die als Mollow-Triplett bekannt sind [60, 61]. Die zentrale Resonanz liegt bei der Pumpfrequenz  $\omega_p$ . Symmetrisch dazu befinden sich die beiden weiteren Resonanzen, welche relativ zur Pumpfrequenz um die (mittlere) Rabifrequenz  $\Omega$  rot- bzw. blauverschoben sind. Die Verschiebung entsteht aufgrund des optischen Stark-Effekts, der durch die Wechselwirkung des TLS mit dem Pumpfeld hervorgerufen wird.

Das Spektrum der Resonanzfluoreszenz berechnet sich im wesentlichen aus der Fouriertransformierten der zweizeitigen Polarisationskorrelationsfunktion für die jeweilige Nachweisfrequenz  $\omega$  des Spektrometers [38]:

$$S(\omega) \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty d\tau \langle J_+(t) J_-(t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} \right\}. \quad (2.45)$$

Die Zeitentwicklung der  $J$ -Operatoren ist bezüglich des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}_0$  in (2.5) mit  $\Delta = 0$  zu bestimmen.

Mit Hilfe der ‘Dressed States’ läßt sich der Ausdruck (2.45) weiter auswerten. Für ein TLS, welches sich zu Beginn im Grundzustand  $|g\rangle$  befindet, folgt:

$$S(\omega) \propto \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu(n), \mu'(n-1)} g_{\mu, \mu', n} \delta(\omega - \omega_p - (\epsilon_{\mu}(n) - \epsilon_{\mu'}(n-1))),$$

mit  $g_{\mu, \mu', n} = p_n |\langle n, m = -1/2 | \mu, k = n \rangle|^2 |\langle \mu', k = n-1 | J_- | \mu, k = n \rangle|^2.$

(2.46)

Hier wurden die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1 übernommen. Es folgt, daß das Spektrum der Resonanzfluoreszenz explizit von der Photonenzahlstatistik  $p_n$  des Pumpfeldes abhängt.

In Abb. 2.24 ist das Spektrum der Resonanzfluoreszenz für die unterschiedlich gequetschten Pumpfelder aus Abb. 2.4.b gezeigt. Es wurde phänomenologisch eine homogene Verbreiterung  $\gamma$  der Resonanzlinien eingeführt. Die Photonenzahlstatistik des Pumpfeldes spiegelt sich auch hier in den beiden durch den optischen Stark-Effekt verschobenen Resonanzen wider.

## 2.6 Zusammenfassung von Kapitel 2

Im optischen Stark-Effekt lassen sich Quanteneigenschaften eines Strahlungsfeldes detektieren. Dazu ist in diesem Kapitel ein Pump-Test-Experiment zum Nachweis des optischen Stark-Effekts diskutiert worden. Die Linienform der blauverschobenen Resonanz im Testabsorptionsspektrum spiegelt die Photonenstatistik des Pumpfeldes direkt wider, wenn die Pumpverstimmung von der Größenordnung der (mittleren) Rabi-Frequenz gewählt ist. Bei quantisierter Behandlung des Pumpfeldes treten zusätzliche Resonanzen nahe der Pumpfrequenz auf, die kein klassisches Analogon haben.

Für mehr als ein TLS (Dicke-Modell) enthalten die verschobenen Resonanzen Unterstrukturen, die eine starke Variation der Testabsorption bei kleinen Änderungen der Testfrequenz zur Folge haben. Die Komplexität der Unterstrukturen nimmt mit wachsender Zahl der TLS zu. Es treten im Vergleich zu einem TLS noch weitere zusätzliche Resonanzen auf, die sich klassisch nicht interpretieren lassen.

Bei einer Pumpverstimmung, die wesentlich kleiner als die (mittlere) Rabi-Frequenz ist, befindet sich innerhalb der blauverschobenen Absorptionslinie ein Bereich, in dem das Testfeld verstärkt wird. Da das Auftreten dieser Verstärkung eine quantisierte Beschreibung des Pumpfeldes erfordert, wird sie in dieser Arbeit als nichtklassische Verstärkung bezeichnet. Der Effekt der nichtklassischen Verstärkung hängt stark von der Zahl der TLS ab.

Die Linienform im optischen Stark-Effekt erweist sich als abhängig von Nicht-diagonalelementen der Dichtematrix des Pumpfeldes, wenn vorher die TLS in einen kohärenten Überlagerungszustand der jeweiligen Niveaus optisch angeregt wurden. Die phasensensitiven Effekte können zu einer Testfeldverstärkung ohne Anfangsinversion oder zu einem anormalen Ausbleichverhalten führen.

Neben dem hier diskutierten Pump-Test-Experiment gibt es verwandte Methoden, den Quantenzustand eines Strahlungsfeldes spektroskopisch zu messen. Sie beruhen ebenfalls auf der Detektion des optischen Stark-Effekts. Diskutiert wurden die Autler-Townes-Spektroskopie und der Nachweis des Spektrums der Resonanzfluoreszenz.

Der experimentelle Nachweis der in diesem Kapitel vorgestellten Effekte ist noch nicht erfolgt. Der Grund ist, daß eine große Kopplung zwischen den TLS und den Pumpphotonen realisiert werden muß, die zumindest in der Größenordnung der Dissipationsrate liegt, was experimentell eine große Herausforderung darstellt. Diese Voraussetzung kann in Experimenten mit Resonatoren hoher Güte [14, 62], Mikroresonatoren [63, 64, 15] oder ‘Microcavities’ [16, 65] erfüllt werden.

# Kapitel 3

## Der optische Stark-Effekt im Dicke-Modell in Dichtematrixnäherung

Im Kapitel 2 wurde der Einfluß eines gequetschten Pumpfeldes auf die Linienform im optischen Stark-Effekt diskutiert. Die Berechnung der gezeigten Spektren beruhte hier auf einer Bestimmung der ‘Dressed States’. Die Diagonalisierung des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}_0$  in (2.5) ist dazu erforderlich. Sie ist jedoch nur für eine moderate Zahl  $N$  von TLS möglich, da der Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$  in unabhängige Untermatrizen der maximalen Dimension  $2N + 1$  zerfällt.

In diesem Kapitel wird das Pump-Test-Experiment mit einer Dichtematrixtheorie beschrieben, die die näherungsweise Berechnung der Testabsorption ermöglicht. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß im Gegensatz zur Diagonalisierung von  $\mathcal{H}_0$  der numerische Aufwand unabhängig von der Zahl  $N$  der TLS ist. Durch Vergleich der genäherten Resultate mit exakten Ergebnissen für moderate Zahlen von TLS wird die Gültigkeit der Dichtematrixnäherung geprüft.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Dichtematrixgleichungen für die Berechnung der Testabsorption abgeleitet, wobei hier Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS näherungsweise behandelt werden. Die Entkopplung wird so durchgeführt, daß sie in nullter Ordnung im Testfeld innerhalb von Unterräumen definierter Anregungszahl erfolgt.

Im zweiten Abschnitt wird dann der Gültigkeitsbereich der Dichtematrixnäherung (DMN) durch Vergleich mit exakten Ergebnissen diskutiert.

Im dritten Teil wird eine erweiterte Dichtematrixnäherung (EDMN) vorgestellt, bei der Korrelationen zwischen Paaren von TLS voll berücksichtigt werden. Diese Erweiterung ist wichtig für die quantitative Bestimmung der Testabsorption im Bereich der nichtklassischen Verstärkung.

### 3.1 Dichtematrixgleichungen

Für die Berechnung der linearen Testabsorption muß nach den Gleichungen (2.14) und (2.15) der im Testfeld lineare Anteil des Erwartungswertes  $\langle J_-(t) \rangle$  bestimmt werden. In diesem Abschnitt sollen dazu Dichtematrixgleichungen für  $\langle J_-(t) \rangle$  und die gekoppelten Größen abgeleitet werden.

Der Anfangszustand ist in (2.21) gegeben, wobei zusätzlich angenommen werden soll, daß sich die TLS in ihrem jeweiligen Grundzustand  $|g\rangle$  befinden. Ist der Operator  $\rho_{n,n'}^{(0)}$  gegeben durch

$$\rho_{n,n'}^{(0)} = \left| n, m = -\frac{N}{2} \right\rangle \left\langle n', m = -\frac{N}{2} \right|, \quad (3.1)$$

so läßt sich der Erwartungswert eines Operators  $\langle \mathcal{O}(t) \rangle$  darstellen als

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \sum_{n,n'} \rho_{n,n'}^{(f)} \langle \mathcal{O}(t) \rangle_{n,n'}. \quad (3.2)$$

$\{|n, m\rangle\}$  sind dabei die bereits in (2.10) eingeführten ‘Bare States’, wobei die Quantenzahl  $j = N/2$  wieder unterdrückt wurde.  $\langle \mathcal{O}(t) \rangle_{n,n'}$  ist definiert durch

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle_{n,n'} = \text{Tr}(\rho_{n,n'}^{(0)} \mathcal{O}(t)). \quad (3.3)$$

$\rho_{n,n'}^{(f)}$  bezeichnet die Matrixelemente der Dichtematrix des Pumpfeldes.

Der lineare Anteil im Testfeld von  $\langle J_-(t) \rangle$ , der im folgenden wieder mit  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle$  bezeichnet wird, hängt für obige Anfangsbedingung nach (2.17) nur von Diagonalelementen der Dichtematrix des Pumpfeldes ab. Es folgt nach (3.2):

$$\langle J_-^{(1)}(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n, \quad (3.4)$$

wobei  $p_n$  die Photonenstatistik des Pumpfeldes bezeichnet.  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n$  kann dabei als linearer Anteil im Testfeld des Erwartungswertes von  $J_-$  für ein Pumpfeld mit  $n$  Photonen interpretiert werden.

Die Dichtematrixgleichungen für  $\langle J_-(t) \rangle_n$  und die gekoppelten Größen folgen direkt aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen, wobei der Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$  aus Gleichung (2.13) verwendet wird. Es entsteht, wie üblich, eine nichtabbrechende Hierarchie gekoppelter Differentialgleichungen.

In dem ersten Satz von Gleichungen koppelt  $\langle J_-(t) \rangle_n$  an Erwartungswerte, die linear in  $J$ -Operatoren sind, nämlich  $\{aJ_3, a^2J_+\}$ , den Erwartungswert von  $a$  und an Erwartungswerte von Operatoren, die quadratisch in  $J$ -Operatoren sind, nämlich  $\{J_3J_-, aJ_3^2\}$ . Weiter treten Erwartungswerte von Operatoren des ersten Typs multipliziert mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  auf. Für diese Operatoren wird dann ein neuer Satz von Gleichungen aufgestellt, in denen obige Operatoren

multipliziert mit  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}^2$  auftreten und so fort. Wird zudem die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses  $J^2$  aus (2.8) ausgenutzt, so folgen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi} &\equiv (J_-, aJ_3, a^2J_+, a)^T, \\ \langle \boldsymbol{\phi} \rangle_n^{(\mu)} &\equiv \langle \boldsymbol{\phi}(\mathcal{K} - n)^\mu \rangle_n; \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \\ \boldsymbol{\psi} &\equiv (0, -2J_3J_-, 4aJ_3^2, 0)^T \\ \langle \boldsymbol{\psi} \rangle_n^{(\mu)} &\equiv \langle \boldsymbol{\psi}(\mathcal{K} - n)^\mu \rangle_n; \quad \mu = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{3.5}$$

die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}(i\partial_t - \omega_p + \mathbf{M}_n) \langle \boldsymbol{\phi}(t) \rangle_n^{(\mu)} &+ \mathbf{D} \langle \boldsymbol{\phi}(t) \rangle_n^{(\mu+1)} + g \langle \boldsymbol{\psi}(t) \rangle_n^{(\mu)} = \\ &= \tilde{g} \{ \delta_{\mu,0} \langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n + (1 - \delta_{\mu,0}) \langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n \} A e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{3.6}$$

In diesen Gleichungen sind Terme proportional zu  $A^*$  bereits fortgelassen worden, da sie keinen Beitrag zum linearen Anteil im Testfeld von  $\langle J_-(t) \rangle_n$  liefern. Die Matrizen  $\mathbf{M}_n$  und  $\mathbf{D}$  sind gegeben durch

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} -\Delta & 2g & 0 & 0 \\ g(n - \frac{N}{2} - 1) & 0 & -g & 0 \\ 0 & -2g(n - \frac{N}{2}) & \Delta & -gN(\frac{N}{2} + 1) \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Die Vektoren  $\mathbf{I}_0$  und  $\mathbf{I}_1$  auf der rechten Seite von Gleichung (3.6) sind definiert durch

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_0 &= (-2J_3, aJ_+, 0, 0)^T, \\ \mathbf{I}_1 &= \left( \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right) - J_3(J_3 + 1), aJ_3J_+, a^2J_+^2, aJ_+ \right)^T.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Die Erwartungswerte  $\langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n$  und  $\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n$  sind für die Bestimmung von  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n$  in nullter Ordnung im Testfeld zu berechnen.

Um aus (3.6) ein abgeschlossenes System von Gleichungen zu erhalten, werden Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS näherungsweise entkoppelt. Diese Korrelationen sind in Erwartungswerten enthalten, die quadratisch in  $J$ -Operatoren sind und die die allgemeine Form  $\langle J_1 J_2 C \rangle_n$  haben. Hier bezeichnen  $J_1$  und  $J_2$  zwei (nicht notwendig verschiedene)  $J$ -Operatoren aus  $\{J_+, J_-, J_3\}$ .  $C$  bezeichnet einen globalen Operator des Systems, der sich aus den Operatoren  $a^\dagger$ ,

$a$  und  $\mathcal{K}$  zusammensetzt.  $\langle J_1 J_2 C \rangle_n$  wird vor der Entkopplung in Erwartungswerte von  $J$ -Operatoren zerlegt, die sich auf einzelne TLS beziehen:

$$\langle J_1 J_2 C \rangle_n = \sum_{\nu} \langle J_{1,\nu} J_{2,\nu} C \rangle_n + \sum_{\nu} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle J_{1,\nu} J_{2,\nu'} C \rangle_n. \quad (3.10)$$

Die Erwartungswerte in der Doppelsumme beschreiben Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS und werden wie folgt entkoppelt:

$$\begin{aligned} \langle J_{1,\nu} J_{2,\nu'} C \rangle_n &\simeq \langle J_{1,\nu} \rangle_n \langle J_{2,\nu'} C \rangle_n + \langle J_{2,\nu'} \rangle_n \langle J_{1,\nu} C \rangle_n - \langle J_{1,\nu} \rangle_n \langle J_{2,\nu'} \rangle_n \langle C \rangle_n \\ &\text{für } \nu \neq \nu'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

In nullter Ordnung im Testfeld erfolgt damit die Entkopplung innerhalb von Unterräumen der Anregungszahl  $n$ . Wird außerdem beachtet, daß aufgrund identischer TLS beispielsweise der Zusammenhang

$$N \langle J_{1,\nu} \rangle_n = \langle J_1 \rangle_n \quad (3.12)$$

gilt, so folgt für  $\langle \psi(t) \rangle_n^{(\mu)}$  der genäherte Ausdruck

$$\langle \psi(t) \rangle_n^{(\mu)} \simeq \mathbf{L}_n(t) \langle \phi(t) \rangle_n^{(\mu)}, \quad (3.13)$$

mit

$$\mathbf{L}_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3(t) \rangle_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8\frac{N-1}{N}\langle J_3(t) \rangle_n & 0 & N - 4\frac{N-1}{N}\langle J_3(t) \rangle_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Für  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n$ , sind die Erwartungswerte in den Komponenten von  $\mathbf{L}_n(t)$  in (3.14) in nullter Ordnung im Testfeld zu bestimmen.

Für  $\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle$  folgt mit entsprechender Entkopplung:

$$\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n = \begin{pmatrix} \frac{N(N+1)}{4} - \frac{N-1}{N}\langle J_3(t) \rangle_n^2 - \langle J_3(t) \rangle_n \\ (\frac{1}{2} + \frac{N-1}{N}\langle J_3(t) \rangle_n)\langle a(t) J_+(t) \rangle_n \\ 0 \\ \langle a(t) J_+(t) \rangle_n \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

In der zweiten und dritten Komponente von  $\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n$  sind in (3.15) bereits Terme fortgelassen worden, die keinen Beitrag in nullter Ordnung im Testfeld liefern. Es folgt ein geschlossenes lineares Differentialgleichungssystem für  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n$  und die gekoppelten Größen, welches noch aus unendlich vielen Gleichungen besteht:

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \omega_p + \mathbf{M}_n + g\mathbf{L}_n(t))\langle \phi^{(1)}(t) \rangle_n^{(\mu)} + \mathbf{D}\langle \phi^{(1)}(t) \rangle_n^{(\mu+1)} &= \\ = \tilde{g} \{ \delta_{\mu,0} \langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n + (1 - \delta_{\mu,0}) \langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n \} A e^{i\omega t}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$



Da die Inhomogenitäten in (3.16) für  $\mu \geq 1$  unabhängig von  $\mu$  sind und die Anfangsbedingung  $\langle \phi^{(1)}(t_0) \rangle_n^{(\mu)} = 0$  gilt, läßt sich das Gleichungssystem (3.16) mit dem Ansatz

$$\langle \phi(t) \rangle_n^{(\mu)} = \tilde{g}(\delta_{\mu,0} \chi_n(t) + (1 - \delta_{\mu,0}) \zeta_n(t)) A e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

in folgendes endliche Gleichungssystem überführen:

$$\begin{aligned} (i\partial_t + (\omega - \omega_p) + \mathbf{M}_n + g\mathbf{L}_n(t)) \chi_n(t) + \mathbf{D} \zeta_n(t) &= \langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n \\ (i\partial_t + (\omega - \omega_p) + \mathbf{M}_n + g\mathbf{L}_n(t) + \mathbf{D}) \zeta_n(t) &= \langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Testabsorption folgt nach den Gleichungen (2.14) und (2.16) aus Kapitel 2 direkt aus dem zeitlichen Mittelwert der ersten Komponente von  $\chi_n(t)$

$$\mathcal{A}_\omega \propto -\hbar \tilde{g}^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n \operatorname{Im} \left( \overline{\langle \chi_n(t) \rangle} \Big|_{1. \text{ Komponente}} \right). \quad (3.19)$$

### Dichtematrixgleichungen für die Inversion und die photonassistierte Polarisation

Für die Dichtematrixgleichungen (3.18) sind als Eingangsgrößen die Erwartungswerte der Inversion  $\langle J_3(t) \rangle_n$  und der photonassistenten Polarisation  $\langle aJ_+(t) \rangle_n$  in nullter Ordnung im Testfeld zu berechnen. Dazu sind weitere Bewegungsgleichungen für diese Größen abzuleiten. Mit den hermiteschen Operatoren

$$p^{(+)} \equiv aJ_+ + a^\dagger J_-, \quad p^{(-)} \equiv -i(aJ_+ - a^\dagger J_-) \quad (3.20)$$

lauten die Bewegungsgleichungen für die Inversion und die photonassistierte Polarisation in nullter Testfeldordnung:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle J_3 \rangle_n &= g \langle p^{(-)} \rangle_n \\ \partial_t \langle p^{(+)} \rangle_n &= -\Delta \langle p^{(-)} \rangle_n \\ \partial_t \langle p^{(-)} \rangle_n &= \Delta \langle p^{(+)} \rangle_n - 4g \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \langle J_3 \rangle_n - gN \left( \frac{N}{2} + 1 \right) + 6g \langle J_3^2 \rangle_n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Um ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, wird der Erwartungswert  $\langle J_3^2(t) \rangle_n$  mit Hilfe der Entkopplung (3.11) genähert als

$$\langle J_3^2(t) \rangle_n \simeq \frac{N}{4} + \frac{N-1}{N} \langle J_3(t) \rangle_n^2 \quad (3.22)$$

Mit der Anfangsbedingungen  $\langle J_3(t_0) \rangle_n = -N/2$ ,  $\langle p^{(+)}(t_0) \rangle_n = 0$ ,  $\langle p^{(-)}(t_0) \rangle_n = 0$  folgt unter Kombination der ersten und zweiten Gleichung aus (3.21):

$$\langle p^{(+)}(t) \rangle_n = -\frac{\Delta}{g} \left( \langle J_3(t) \rangle_n + \frac{N}{2} \right). \quad (3.23)$$

Für die Inversion  $\langle J_3(t) \rangle_n$  ergibt sich mit Hilfe der dritten Gleichung aus (3.21) eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + \tilde{\Omega}_n^2 - 2g^2(N-1))\langle J_3(t) \rangle_n &= 6g^2 \frac{N-1}{N} \langle J_3(t) \rangle_n^2 = \\ &= -\frac{N}{2}(g^2(N-1) + \Delta^2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei  $\tilde{\Omega}_n = \sqrt{4g^2n + \Delta^2}$  die verallgemeinerte Rabifrequenz für  $n$  Pumpphotonen ist.

Diese Gleichung hat eine eindeutige, überall endliche Lösung, die sich durch die elliptischen Jacobi-Funktionen  $\text{sn}(\theta, \kappa)$  [66] ausdrücken läßt:

$$\langle J_3(t) \rangle_n = -\frac{N}{2} \left( 1 - \frac{8g^2n}{\omega_n^2} \text{sn}^2 \left( \frac{\omega_n t}{2}; k_n \right) \right), \quad (3.25)$$

wobei folgende Abkürzungen verwendet wurden:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{\Omega_n^{(+)} + \Omega_n^{(-)}}{2}; \quad k_n = \left( \frac{\Omega_n^{(+)} - \Omega_n^{(-)}}{\Omega_n^{(+)} + \Omega_n^{(-)}} \right)^2; \\ \Omega_n^{(\pm)} &= \sqrt{4g^2 \left( \sqrt{n} \pm \sqrt{N-1} \right)^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da die Beziehung  $\omega_n^2 \geq 4g^2n$  gilt, ist gewährleistet, daß der Erwartungswert  $\langle J_3(t) \rangle_n$  für alle Zeiten  $t$  auch in der Dichtematrixnäherung im physikalisch erlaubten Wertebereich  $[-N/2; N/2]$  bleibt.

Anders verhält es sich mit dem Erwartungswert der Pumpphotonenzahl  $\langle a^\dagger a \rangle_n$ , für den in Dichtematrixnäherung gilt:

$$\langle a^\dagger a \rangle_n = n \left( 1 - \frac{4g^2N}{\omega_n^2} \text{sn}^2 \left( \frac{\omega_n t}{2}; k_n \right) \right). \quad (3.27)$$

Dieser Ausdruck ist nur positiv definit, falls die Bedingung  $n \geq N(1 - \frac{\Delta^2}{4g^2})$  erfüllt ist. Das bedeutet, daß für sehr kleine Pumpverstimmungen  $\Delta$  kombiniert mit einer großen Zahl  $N$  von TLS unphysikalische (negative) Ergebnisse für die Pumpphotonenzahl auftreten können.

Der Parameterbereich, der im weiteren Verlauf der Arbeit betrachtet wird, setzt Pumpverstimmungen mit  $\Delta \geq 2g$  voraus. In diesem Bereich treten keine unphysikalischen (negativen) Ergebnisse für die Pumpphotonenzahl auf.

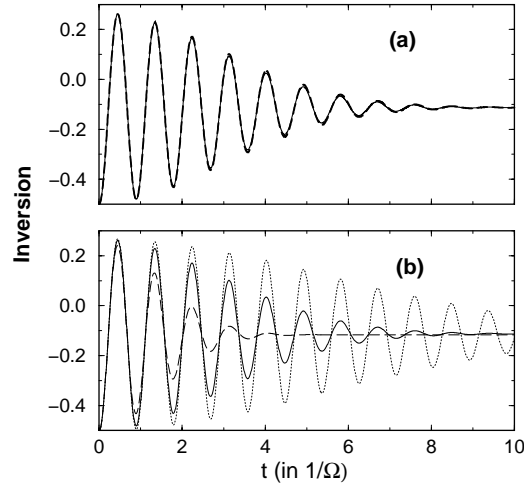


Abbildung 3.1: (a) Zeitentwicklung der Inversion in DMN für ein kohärentes Pumpfeld (gestrichelte Kurve) im Vergleich mit der exakten Zeitentwicklung (durchgezogene Kurve) für  $N = 10$ . (b) Zeitentwicklung der Inversion in DMN für unterschiedlich gequetschte Pumpfelder. Durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ ; gepunktete Kurve:  $\xi = 0,7$ ; gestrichelte Kurve:  $\xi = -0,7$ . Weitere Parameter:  $\Delta = 8g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ .

## 3.2 Ergebnisse der Dichtematrixnäherung

In diesem Abschnitt wird untersucht, in welchem Parameterbereich die Dichtematrixgleichungen (3.18) gültig sind. Dazu werden die Ergebnisse der Dichtematrixnäherung (DMN) mit exakten Ergebnissen für moderate Zahlen  $N$  von TLS verglichen.

Im ersten Teilabschnitt werden zunächst die Ergebnisse für die Inversion in nullter Testfeldordnung diskutiert. Im zweiten Teilabschnitt wird dann das Testabsorptionsspektrum in der DMN betrachtet.

### 3.2.1 Ergebnisse für die Inversion

In Abb. 3.1.a ist die Zeitentwicklung der Inversion in nullter Testfeldordnung für zehn TLS ( $N = 10$ ) und ein kohärentes Pumpfeld gezeigt. Die durchgezogene Kurve gibt die exakte Zeitentwicklung wieder, während die gestrichelte Kurve die Ergebnisse der Dichtematrixnäherung darstellt. Aufgrund der Unschärfe in der Photonenzahl des kohärenten Zustands erfolgt ein Kollaps der Rabioszillationen. Dieser Kollaps wird in der Dichtematrixtheorie quantitativ richtig beschrieben, wie der Vergleich der exakten mit der genäherten Kurve zeigt.

In Abb. 3.1.b ist die Zeitentwicklung der Inversion für unterschiedlich gequetschte Pumpfelder gezeigt, wobei die dargestellten Kurven im Rahmen der DMN berechnet wurden. Im Vergleich zum kohärenten Feld erfolgt der Kollaps

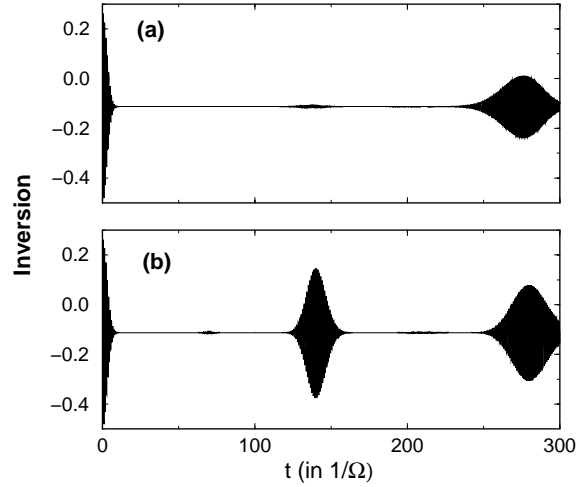


Abbildung 3.2: Zeitentwicklung der Inversion für ein kohärentes Pumpfeld (a) exakt, (b) DMN. Weitere Parameter:  $N = 10$ ,  $\Delta = 8g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\xi = 0$ .

der Rabioszillationen für ein phasengequetschtes Feld schneller (gestrichelte Kurve), während er im Fall des amplitudengequetschten Feldes langsamer erfolgt (gepunktete Kurve). Die exakten Ergebnisse sind aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abb. 3.1.b nicht gezeigt. Sie stimmen jedoch auch hier gut mit den Ergebnissen der DMN überein.

Während der Kollaps der Rabioszillationen quantitativ richtig in der DMN beschrieben wird, liefert letztere keine quantitativen Ergebnisse für Details der Zeitentwicklung im Langzeitbereich, wie Abb. 3.2 zeigt. Hier ist die Zeitentwicklung der Inversion für ein kohärentes Pumpfeld für einen großen Zeitbereich von mehreren hundert Rabizyklen zu sehen. Die Kurve in Abb. 3.2.a ist die exakte Zeitentwicklung, die mit den Ergebnissen der DMN in Abb. 3.2.b verglichen wird. Es treten für große Zeiten die sogenannten ‘Revivals’ [67] der Rabioszillationen auf, und zwar sowohl in den exakten als auch in den genäherten Ergebnissen. Es gibt hier jedoch keine quantitative Übereinstimmung in den Details. Lediglich die Zeitpositionen, an denen die ‘Revivals’ auftreten, sind ungefähr gleich.

Allerdings stimmen die genäherten und exakten Zeitmittelwerte für die Inversion sehr gut überein (bis auf  $10^{-4}$ ). Dies ist entscheidend, da die zeitgemittelte Inversion eine Eingangsgröße zur Berechnung der Testabsorption darstellt.

### 3.2.2 Ergebnisse für die Testabsorption

In diesem Teilabschnitt wird die Testabsorption in der DMN mit der exakten verglichen. Nach Gleichung (3.19) wird die Testabsorption durch den Zeitmittelwert der Größe  $\chi_n(t)$  bestimmt. Die Integration der Differentialgleichungen (3.18) kann umgangen werden, indem die Zeitmittelwerte direkt in diese eingeführt werden. Wird dabei berücksichtigt, daß die Zeitmittel der  $t$ -Ableitungen verschwinden

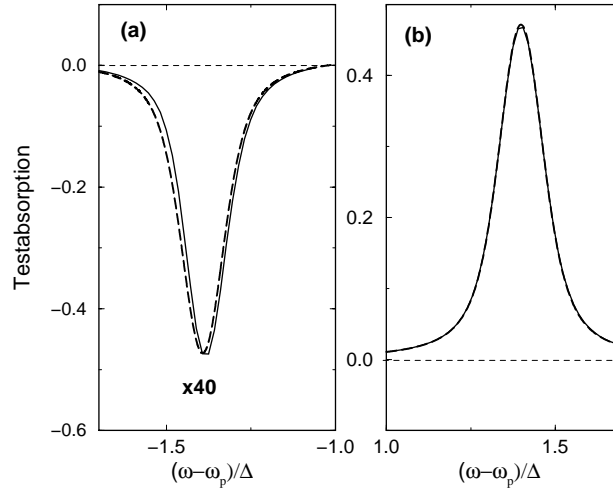


Abbildung 3.3: Testabsorption für  $N = 5$  und ein kohärentes Pumpfeld. Durchgezogene Kurven: Berechnung mit (3.29), gestrichelte Kurven: Integration der Dichtematrixgleichungen (3.18). Weitere Parameter:  $N = 5$ ,  $\Delta = 16g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0, 8g$ .

und zudem folgende Näherung gemacht:

$$\overline{\mathbf{L}_n(t) \chi_n(t)} \simeq \overline{\mathbf{L}_n(t)} \overline{\chi_n(t)}; \quad \overline{\mathbf{L}_n(t) \zeta_n(t)} \simeq \overline{\mathbf{L}_n(t)} \overline{\zeta_n(t)}, \quad (3.28)$$

so folgt aus (3.18) ein lineares Gleichungssystem für die zeitgemittelten Größen  $\overline{\chi_n(t)}$  und  $\overline{\zeta_n(t)}$ :

$$\begin{aligned} ([\omega - \omega_p] + i\gamma + \mathbf{M}_n + g\overline{\mathbf{L}_n(t)}) \overline{\chi_n(t)} + \mathbf{D} \overline{\zeta_n(t)} &= \overline{\langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n} \\ ([\omega - \omega_p] + i\gamma + \mathbf{M}_n + g\overline{\mathbf{L}_n(t)} + \mathbf{D}) \overline{\zeta_n(t)} &= \overline{\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Gegenüber (3.18) ist hier eine Dämpfungskonstante  $\gamma$  eingeführt worden, welche dissipative Effekte phänomenologisch beschreibt. Die Eingangsgrößen in (3.29) sind die zeitgemittelte Inversion  $\overline{\langle J_3(t) \rangle_n}$ , die zeitgemittelte photonassistierte Polarisation  $\overline{\langle aJ_+(t) \rangle_n}$ , sowie die Zeitmittel der Produkte  $\overline{\langle J_3(t) \rangle_n \langle aJ_+(t) \rangle_n}$  und  $\overline{\langle J_3(t) \rangle_n^2}$ . Die Größen können, wie oben gezeigt, mit guten Genauigkeit aus der Lösung der Dichtematrixgleichungen in nullter Ordnung im Testfeld (3.21) bestimmt werden.

Zunächst soll der Einfluß der Näherung in (3.28) auf die Ergebnisse für die Testabsorption überprüft werden. In Abb. 3.3 wurde die Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld mit zwei Methoden berechnet. Zum einen wurden die Dichtematrixgleichungen für die zeitgemittelten Größen (3.29) verwendet (durchgezogene Kurven). Zum anderen wurden die Dichtematrixgleichungen in (3.18) numerisch integriert und anschließend die Zeitmittelwerte berechnet (gestrichelte Kurven). Für die blauverschobene Absorption (Bereich A) in Abb. 3.3.b, stimmen die beiden Kurven hervorragend überein, während im Bereich der Testfeldverstärkung in Abb. 3.3.a die Kurven leicht voneinander abweichen. Folglich hat

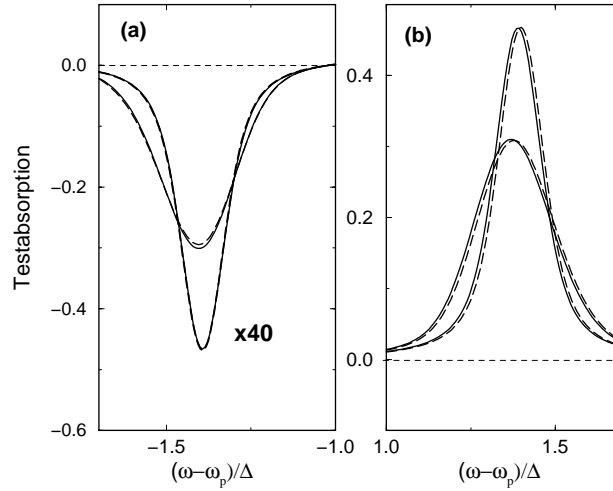


Abbildung 3.4: Exakte (durchgezogene Kurven) und genäherte (gestrichelte Kurven) Testabsorption für ein kohärentes ( $\xi = 0$ ) und ein phasengequetschtes ( $\xi = -0,8$ ) Pumpfeld. Parameter:  $N = 5$ ,  $\Delta = 16g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,8g$ .

die Näherung (3.28) nur einen kleinen Einfluß auf die Ergebnisse für die Testabsorption, senkt jedoch den Berechnungsaufwand wesentlich. Bei den im folgenden dargestellten Ergebnissen sind daher stets die zeitgemittelten Dichtematrixgleichungen (3.29) benutzt worden.

In Abb. 3.4 ist die Testabsorption in DMN für ein kohärentes und ein phasengequetschtes Pumpfeld mit der exakten verglichen. Die exakten Kurven sind die durchgezogenen, während die gestrichelten Kurven den Resultaten der DMN entsprechen. Die Pumpverstimmung  $\Delta$  ist in der Größenordnung der (mittleren) Rabifrequenz  $\Omega$  gewählt, und die mittlere Pumpphotonenzahl  $\langle n \rangle$  überschreitet die Zahl  $N$  der TLS wesentlich ( $N/\langle n \rangle = 0,08$ ). Abgesehen von einer leichten Verschiebung zwischen der exakten und genäherten Testabsorption im blauverschobenen Bereich (Abb. 3.4.b), ist die Übereinstimmung zwischen exakten und genäherten Ergebnissen gut. Insbesondere wird der Einfluß der Photonstatistik auf die Linienform im Rahmen der Dichtematrixnäherung richtig beschrieben.

Für Pumpverstimmungen, die wesentlich kleiner als die (mittlere) Rabifrequenz sind, verschlechtern sich die Ergebnisse der DMN. Insbesondere gilt dies für Pumpverstimmungen, bei denen die in Abschnitt 2.3.4 diskutierte nichtklassische Verstärkung auftritt (Abb. 3.5). Hier gibt es keine quantitative Übereinstimmung zwischen den exakten und genäherten Ergebnissen. Der Effekt der nichtklassischen Verstärkung wird in der DMN erheblich unterschätzt. Um die nichtklassische Verstärkung im Rahmen einer Dichtematrixtheorie quantitativ zu beschreiben, müssen die bisher entkoppelten Paarkorrelationen voll berücksichtigt werden. Dies wird Gegenstand des nächsten Abschnitts 3.3 sein.

Vorher sollte erwähnt werden, daß die DMN auch keine guten Ergebnisse lie-

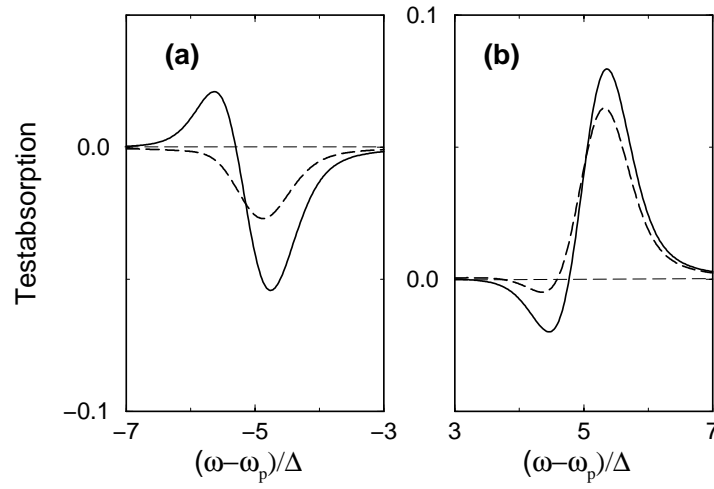


Abbildung 3.5: Exakte (durchgezogene Kurven) und genäherte (gestrichelte Kurven) Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld ( $\xi = 0$ ) im Bereich der nicht-klassischen Verstärkung. Parameter:  $N = 10$ ,  $\Delta = 3g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,8g$ .

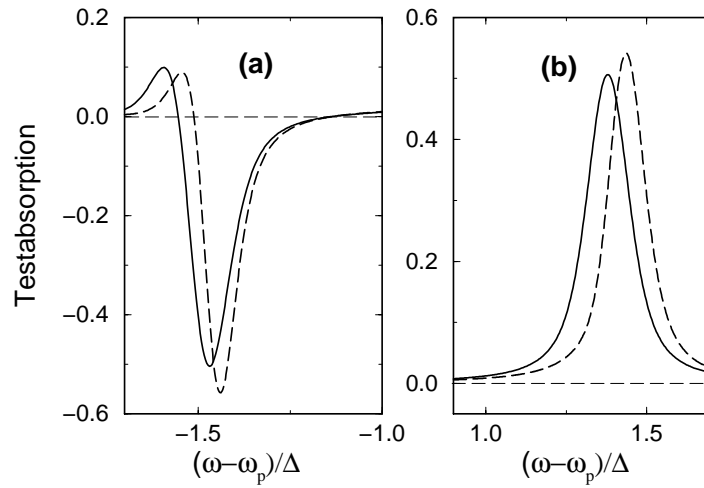


Abbildung 3.6: Exakte (durchgezogene Kurven) und genäherte (gestrichelte Kurven) Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld ( $\xi = 0$ ) für  $N/\langle n \rangle = 0,5$ . Parameter:  $N = 30$ ,  $\Delta = 16g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,8g$ .

fert, falls sich die Zahl  $N$  der TLS der mittleren Photonenzahl  $\langle n \rangle$  nähert. Dies ist in Abb. 3.6 demonstriert, wo die Testabsorption für ein Verhältnis  $N/\langle n \rangle = 0,5$  gezeigt ist. Die DMN liefert hier keine quantitative Beschreibung für die Lage und Höhe der Resonanzen. Die Form der Resonanzen wird allerdings qualitativ erfaßt. Die Ergebnisse der DMN werden in diesem Parameterbereich deshalb schlechter, da die näherungsweise behandelten Korrelationen, welche durch das quantisierte Pumpfeld vermittelt werden, mit wachsendem Verhältnis  $N/\langle n \rangle$  einen immer größeren Einfluß auf die Testabsorption haben. Eine Verbesserung der DMN für diesen Parameterbereich kann durch eine volle Berücksichtigung höherer Korrelationen in den Dichtematrixgleichungen erreicht werden.

### 3.2.3 Zusammenfassung von Abschnitt 3.2

- Die Dichtematrixnäherung liefert für die zeitgemittelte Inversion in nullter Testfeldordnung eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten ( $\simeq 10^{-4}$ ). Die Details der Zeitentwicklung der Inversion werden im Langzeitbereich von mehreren hundert Rabizyklen allerdings nicht quantitativ richtig beschrieben.
- Für eine Pumpverstimmung in der Größenordnung der (mittleren) Rabifrequenz und einer Zahl von TLS, die die mittlere Pumpphotonenzahl wesentlich unterschreitet, liefert die DMN gute Ergebnisse für die Testabsorption im optischen Stark-Effekt.
- Die näherungsweise Entkopplung von Korrelationen unterschiedlicher TLS reicht für eine quantitative Beschreibung der nichtklassischen Verstärkung nicht aus. Ebenso verhält es sich, wenn sich das Verhältnis der Zahl der TLS zur mittleren Pumpphotonenzahl  $N/\langle n \rangle$  der Eins nähert.



### 3.3 Dichtematrixgleichungen mit Paarkorrelationen

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß die näherungsweise Behandlung der Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS in (3.11) nicht für eine quantitative Beschreibung der nichtklassischen Verstärkung ausreicht (siehe Abb. 3.5).

In diesem Abschnitt wird dieser Mangel durch eine erweiterte Dichtematrixnäherung (EDMN) behoben, bei der Paarkorrelationen zwischen unterschiedlichen TLS voll berücksichtigt werden. Erst höhere Korrelationen zwischen drei unterschiedlichen TLS werden näherungsweise entkoppelt.

#### 3.3.1 Ableitung der erweiterten Dichtematrixgleichungen

In diesem Teilabschnitt wird ein erweiterter Satz von Dichtematrixgleichungen für den linearen Anteil im Testfeld von  $\langle J_-(t) \rangle_n$  abgeleitet, in dem Paarkorrelationen voll berücksichtigt sind. Die Eingangsgrößen sind wieder die Inversion  $\langle J_3(t) \rangle_n$  und die an diese gekoppelten Größen in nullter Ordnung im Testfeld. Zunächst sollen die erweiterten Dichtematrixgleichungen für  $\langle J_3(t) \rangle_n$  betrachtet werden.

#### Erweiterte Dichtematrixgleichungen für die Inversion

In den Dichtematrixgleichungen für die Inversion ist im Abschnitt 3.1 der Erwartungswert  $\langle J_3^2(t) \rangle_n$  in (3.22) genähert worden. Da dieser Erwartungswert Paarkorrelationen zwischen unterschiedlichen TLS beinhaltet, wird er in der erweiterten Dichtematrixtheorie nicht entkoppelt, sondern es werden weitere Bewegungsgleichungen für diesen Erwartungswert und die verknüpften Größen abgeleitet.

$\langle J_3^2(t) \rangle_n$  koppelt an Erwartungswerte weiterer Operatoren, die ebenfalls Paarkorrelationen zwischen unterschiedlichen TLS beinhalten, nämlich  $\langle aJ_+J_3 \rangle_n$  und  $\langle a^2J_+^2 \rangle_n$ . Weiter treten Terme auf, die Korrelationen zwischen drei unterschiedlichen TLS beinhalten, nämlich  $\langle J_3^3 \rangle_n$  und  $\langle aJ_+J_3^2 \rangle_n$ . Um ein abgeschlossenes System von Dichtematrixgleichungen zu erhalten, werden diese Terme genähert, indem Korrelationen zwischen drei unterschiedlichen TLS entkoppelt werden.

Die allgemeine Form der zu nähernden Erwartungswerte ist  $\langle C\tilde{J}_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 \rangle_n$ , wobei  $\tilde{J}_1$ ,  $\tilde{J}_2$  und  $\tilde{J}_3$  drei Operatoren aus  $\{J_+, J_-, J_3\}$  sind und  $C$  ein globaler Operator ist, der sich aus  $a^\dagger$ ,  $a$  und  $\mathcal{K}$  zusammensetzt. Zunächst wird  $\langle C\tilde{J}_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 \rangle_n$  in Erwartungswerte bezüglich der einzelnen TLS zerlegt:

$$\begin{aligned}
\langle C\tilde{J}_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 \rangle_n &= \sum_{\nu} \langle C\tilde{J}_{1,\nu}\tilde{J}_{2,\nu}\tilde{J}_{3,\nu} \rangle_n + \sum_{\nu} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle C\tilde{J}_{1,\nu}\tilde{J}_{2,\nu'}\tilde{J}_{3,\nu} \rangle_n + \\
&+ \sum_{\nu} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle C\tilde{J}_{1,\nu'}\tilde{J}_{2,\nu}\tilde{J}_{3,\nu} \rangle_n + \sum_{\nu} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle C\tilde{J}_{1,\nu}\tilde{J}_{2,\nu'}\tilde{J}_{3,\nu'} \rangle_n + \\
&+ \sum_{\nu} \sum_{\nu' \neq \nu} \sum_{\nu'' \neq \nu'} \langle C\tilde{J}_{1,\nu}\tilde{J}_{2,\nu'}\tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Die Erwartungswerte in der letzten Summe werden in Analogie zu (3.11) näherungsweise entkoppelt:

$$\begin{aligned}
\langle C \tilde{J}_{1,\nu} \tilde{J}_{2,\nu'} \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n &\simeq \langle C \tilde{J}_{1,\nu} \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \langle \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n + \langle C \tilde{J}_{1,\nu} \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \langle \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n + \\
&+ \langle C \tilde{J}_{2,\nu'} \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \langle \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n - \langle C \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \langle \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \\
&- \langle C \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \langle \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n - \langle C \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \langle \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \\
&+ \langle C \rangle_n \langle \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \langle \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Entkopplung wird wieder so durchgeführt, daß sie in nullter Ordnung im Testfeld innerhalb eines Unterraumes konstanter Anregungszahl erfolgt. Wird diese Entkopplung auf den Erwartungswert  $\langle a J_{\nu,+} J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n$  angewandt, so genügt sie nicht der Anregungszahlerhaltung. Während nämlich der Operator  $a J_{\nu,+} J_{\nu',3} J_{\nu'',3}$  mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  in (2.7) vertauscht, treten nach der Entkopplung Erwartungswerte von Operatoren auf, die nicht mit  $\mathcal{K}$  vertauschen. Ein Beispiel dafür ist der Term  $\langle a J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n \langle J_{\nu,+} \rangle_n$ , der bei der Entkopplung von  $\langle a J_{\nu,+} J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n$  auf der rechten Seite nach (3.31) auftritt. Die Operatoren in diesen Erwartungswerten vertauschen beide nicht mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$ .

Die Ergebnisse der erweiterten Dichtematrixnäherung (EDMN) lassen sich wesentlich verbessern, wenn ein modifiziertes Entkopplungsschema angewandt wird, das der Anregungszahlerhaltung genügt. Dazu wird eine Zerlegung des Operators  $C$  von der Form

$$C = C_1 C_2 C_3 \tag{3.32}$$

durchgeführt, so daß die Operatoren  $C_1 \tilde{J}_{1,\nu}$ ,  $C_2 \tilde{J}_{2,\nu'}$  und  $C_3 \tilde{J}_{\nu'',3}$  mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  vertauschen. Die so definierten assistierten  $J$ -Operatoren bleiben nach der Entkopplung bestehen:

$$\begin{aligned}
\langle C \tilde{J}_{1,\nu} \tilde{J}_{2,\nu'} \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n &= \langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} C_2 \tilde{J}_{2,\nu'} C_3 \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \\
&\simeq \langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} C_2 \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \langle C_3 \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n + \langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} C_3 \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \langle C_2 \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \\
&+ \langle C_2 \tilde{J}_{2,\nu'} C_3 \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n \langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \\
&- 2 \langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle C_2 \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n \langle C_3 \tilde{J}_{3,\nu''} \rangle_n.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Da identische TLS betrachtet werden, lassen sich Terme der Form  $\langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n$  oder  $\langle C_1 \tilde{J}_{1,\nu} C_2 \tilde{J}_{2,\nu'} \rangle_n$  für  $\nu' \neq \nu$  nach der Entkopplung wieder in Erwartungswerte überführen, die globale  $J$ -Operatoren aus  $\{J_+, J_-, J_3\}$  enthalten. Es folgt ein geschlossenes System von Dichtematrixgleichungen für die Erwartungswerte  $\langle J_3 \rangle_n$ ,  $\langle a J_+ \rangle_n$ ,  $\langle J_3^2 \rangle_n$ ,  $\langle a J_+ J_3 \rangle_n$  und  $\langle a^2 J_+^2 \rangle_n$ , welches in Anhang A angegeben ist.

## Erweiterte Dichtematrixgleichungen für die testinduzierte Polarisation

Zur Bestimmung der testinduzierten Polarisation sind die Dichtematrixgleichungen (3.6) für  $\langle J_-(t) \rangle$  und die gekoppelten Größen zu betrachten. In diesen Dichtematrixgleichungen treten unter anderem die Erwartungswerte  $\langle J_3 J_- \rangle_n$  und  $\langle a J_3^2 \rangle_n$  auf, welche Paarkorrelationen enthalten, die in Abschnitt 3.1 genähert wurden. In der erweiterten Dichtematrixtheorie werden diese Größen voll berücksichtigt. In dem erweiterten Satz von Bewegungsgleichungen koppeln sie an weitere Erwartungswerte, die Paarkorrelationen enthalten, nämlich  $\langle a^2 J_+ J_3 \rangle_n$ ,  $\langle a^3 J_+^2 \rangle_n$  und  $\langle a^\dagger J_-^2 \rangle_n$ . Zusätzlich treten Erwartungswerte auf, die Dreierkorrelationen enthalten, nämlich  $\langle J_3^2 J_- \rangle_n$ ,  $\langle a J_3^3 \rangle_n$  und  $\langle a^2 J_+ J_3^2 \rangle_n$ .

Die Struktur der erweiterten Dichtematrixgleichungen entspricht Gleichung (3.6). In den Inhomogenitäten  $\langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n$  und  $\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n$  des Differentialgleichungssystems treten die Erwartungswerte der Inversion  $\langle J_3 \rangle_n$  und der an diese gekoppelten Größen auf, welche in nullter Ordnung im Testfeld zu bestimmen sind.

Um einen abgeschlossenen Satz von Dichtematrixgleichungen für  $\langle J_- \rangle_n$  und die daran gekoppelten Größen zu erhalten, werden Korrelationen zwischen drei verschiedenen TLS auch hier unter Berücksichtigung der Anregungszahlerhaltung entkoppelt. Im Unterschied zu den Dichtematrixgleichungen in nullter Ordnung im Testfeld sind nun Erwartungswerte von Operatoren  $\mathcal{O}$  zu entkoppeln, welche die Anregungszahl um  $-1$  ändern, d. h. es gilt:

$$[\mathcal{K}, \mathcal{O}] = -\mathcal{O}. \quad (3.34)$$

Unter einer anregungszahlerhaltenden Entkopplung soll bei diesen Operatoren eine solche verstanden werden, bei der die in den entkoppelten Erwartungswerten auftretenden Operatoren entweder die Anregungszahl um  $-1$  ändern oder mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  vertauschen.

Das Entkopplungsschema in (3.31) würde die Anregungszahlerhaltung beispielsweise bei Anwendung auf  $\langle a^2 J_{\nu,+} J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n$  nicht erfüllen. Für eine anregungszahlerhaltende Entkopplung wird wie oben der globale Operator  $C$  zerlegt, so daß  $C_1 \tilde{J}_{1,\nu}$ ,  $C_2 \tilde{J}_{2,\nu'}$  und  $C_3 \tilde{J}_{3,\nu''}$  entweder mit  $\mathcal{K}$  vertauschen oder die Anregungszahl um  $-1$  ändern.

De facto treten nur Dreierkorrelationen der Form  $\langle C \tilde{J}_{1,\nu} J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n$  auf, wobei gilt:

$$[\mathcal{K}, C \tilde{J}_{1,\nu}] = -C \tilde{J}_{1,\nu}. \quad (3.35)$$

Die triviale Zerlegung von  $C$  mit  $C_1 = C$ ,  $C_2 = 1$  und  $C_3 = 1$  erfüllt bereits die Forderung nach Anregungszahlerhaltung. Die Entkopplung lautet nach (3.33):

$$\begin{aligned} \langle C \tilde{J}_{1,\nu} J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n &\simeq \langle C \tilde{J}_{1,\nu} J_{\nu',3} \rangle_n \langle J_{\nu'',3} \rangle_n + \langle C \tilde{J}_{1,\nu} J_{\nu'',3} \rangle_n \langle J_{\nu',3} \rangle_n \\ &\quad + \langle C \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle J_{\nu',3} J_{\nu'',3} \rangle_n - 2 \langle C \tilde{J}_{1,\nu} \rangle_n \langle J_{\nu',3} \rangle_n \langle J_{\nu'',3} \rangle_n. \end{aligned} \quad (3.36)$$

In der Inhomogenität  $\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n$  treten ebenfalls Dreierkorrelationen auf, die nach (3.33) anregungszahlerhaltend entkoppelt werden. Es folgt ein erweitertes System von Dichtematrixgleichungen, welches die Struktur analog zu Gleichung (3.16) hat:

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \omega_p + \mathbf{M}_n + g\mathbf{L}_n(t))\langle \phi^{(1)}(t) \rangle_n^{(\mu)} + \mathbf{D}\langle \phi^{(1)}(t) \rangle_n^{(\mu+1)} = \\ = \tilde{g} \{ \delta_{\mu,0} \langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n + (1 - \delta_{\mu,0}) \langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n \} A e^{i\omega t}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Der Vektor  $\phi$  ist hier definiert durch

$$\phi = (J_-, aJ_3, a^2J_+, a, J_3J_-, aJ_3^2, a^2J_+J_3, a^3J_+^2, a^\dagger J_-^2)^T. \quad (3.38)$$

Die Matrizen  $\mathbf{M}_n$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{L}_n(t)$  sind ebenfalls von entsprechend höherer Dimension im Vergleich zu (3.16) und werden in Anhang B angegeben. Dort sind auch die Ausdrücke für die Vektoren  $\langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n$  und  $\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n$  zu finden.

Der bereits in Abschnitt 3.1 verwendete Ansatz (3.17) läßt sich hier analog benutzen. Es resultiert ein entsprechendes endliches Differentialgleichungssystem der Form (3.18).

Trotz der gestiegenen Zahl der Dichtematrixgleichungen ist der Berechnungsaufwand weiterhin unabhängig von der Zahl  $N$  der TLS und ermöglicht die näherungsweise Bestimmung der Testabsorption auch für große Zahlen von TLS.

### 3.3.2 Ergebnisse der erweiterten Dichtematrixnäherung (EDMN)

#### Ergebnisse für die Inversion

Zunächst sollen die Ergebnisse der erweiterten Dichtematrixnäherung (EDMN) für die Inversion vorgestellt werden. Bezüglich  $\langle J_3(t) \rangle$  hat die einfache Dichtematrixnäherung in Abschnitt 3.1, bei der Paarkorrelationen zwischen unterschiedlichen TLS entkoppelt wurden und die im folgenden immer mit DMN abgekürzt wird, bereits gute Ergebnisse für den Zeitmittelwert und die Zeitentwicklung im Anfangsbereich geliefert, wenn die Pumpverstimmung in der Größenordnung der (mittleren) Rabifrequenz gewählt wurde.

Die EDMN verbessert im Vergleich zur DMN die Ergebnisse für einen Parameterbereich, in dem die Pumpverstimmung wesentlich kleiner als die (mittlere) Rabifrequenz ist oder die Zahl  $N$  der TLS die mittlere Pumpphotonenzahl  $\langle n \rangle$  überschreitet. Dazu ist in Abb. 3.7 die Zeitentwicklung der Inversion für ein Pumpfeld im Fockzustand gezeigt, wobei  $N/\langle n \rangle = 2$  gewählt wurde. Neben der exakten Zeitentwicklung (durchgezogene Kurve), ist auch die Zeitentwicklung in der DMN (gepunktete Kurve) und der EDMN (gestrichelte Kurve) gezeigt. Die EDMN liefert über einen weit größeren Zeitbereich eine quantitative Übereinstimmung mit den exakten Ergebnissen als die DMN.

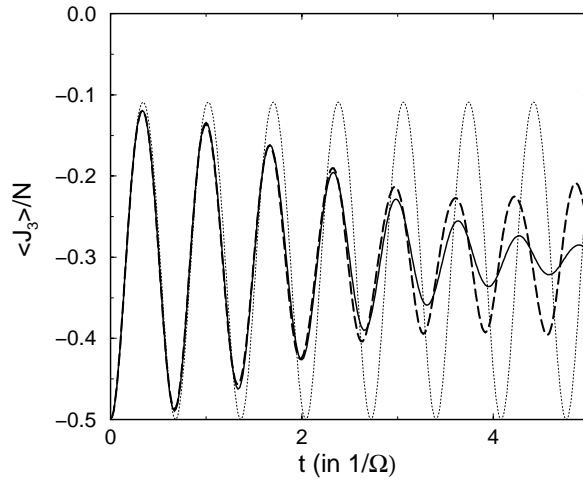


Abbildung 3.7: Zeitentwicklung der Inversion für  $N = 20$  und ein Pumpfeld im Fockzustand mit  $n = 10$  Photonen ( $\Delta = 4g$ ). Durchgezogene Kurve: exakt; gepunktete Kurve: DMN; gestrichelte Kurve: EDMN.

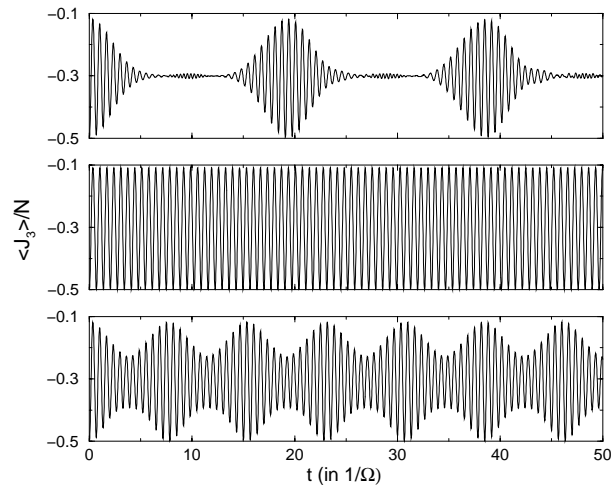


Abbildung 3.8: Zeitentwicklung der Inversion mit Parametern wie in Abb. 3.7. Oberes Bild: exakt; mittleres Bild: DMN; unteres Bild: EDMN.

	Exakt	DMN	EDMN
$\langle J_3(t) \rangle / N$	-0.30009	-0.29601	-0.30012

Tabelle 3.1: Zeitgemittelte Inversion (exakt und genähert) für die Parameter in Abb. 3.8.

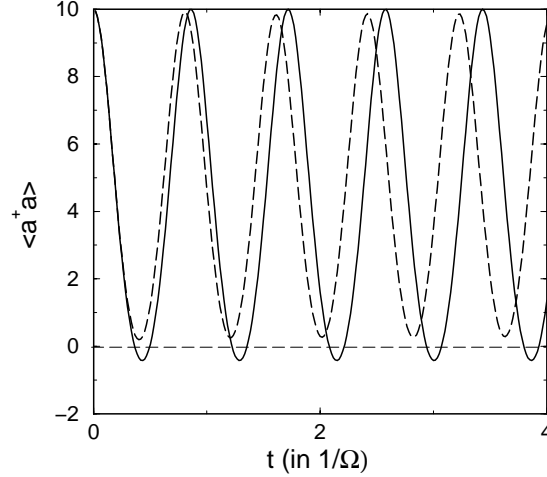


Abbildung 3.9: Zeitentwicklung der Pumpphotonenzahl in DMN (durchgezogene Kurve) und in EDMN (gestrichelte Kurve) für ein Pumpfeld im Fockzustand. In der DMN treten unphysikalische negative Werte auf. Parameter:  $N = 20$ ,  $n = 10$ ,  $\Delta = 0,6g$ .

In Abb. 3.8 ist die Zeitentwicklung der Inversion im Langzeitbereich zu sehen, wobei im oberen Teilbild der exakte Verlauf abgebildet ist. Die Ergebnisse der DMN sind im mittleren und die der EDMN im unteren Teilbild dargestellt. Offensichtlich reicht selbst die volle Berücksichtigung der Paarkorrelationen in der EDMN nicht für eine quantitative Beschreibung der Details im Langzeitbereich aus. Jedoch gibt die EDMN das Schwebungsverhalten der Inversion im exakten Verlauf zumindest ansatzweise wieder, während die Zeitentwicklung der Inversion in der DMN gar keine Schwebung aufweist. Außerdem liefert die EDMN einen besseren Wert für das Zeitmittel der Inversion als die DMN, wie Tabelle 3.1 zeigt.

Die volle Berücksichtigung der Paarkorrelationen in der Dichtematrixnäherung verbessert auch die Ergebnisse bezüglich der unphysikalischen (negativen) Pumpphotonenzahl, die in der einfachen DMN nach (3.27) auftreten können. In Abb. 3.9 ist die Zeitentwicklung mittleren Pumpphotonenzahl für Parameter gezeigt, bei denen in der DMN negative Werte auftreten (durchgezogene Kurve). In der EDMN (gestrichelte Kurve) wird dieser Mangel der DMN behoben. Da eine analytische Lösung der Dichtematrixgleichungen mit Paarkorrelationen aufgrund ihrer Komplexität nicht angegeben werden kann, konnte nicht der allgemeine

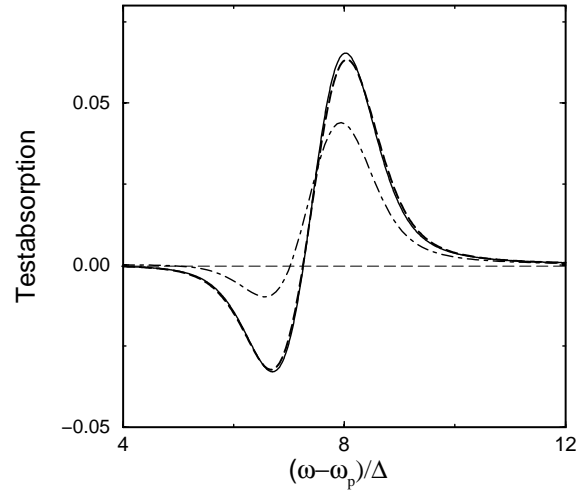


Abbildung 3.10: Testabsorption für  $N = 10$  und ein kohärentes Pumpfeld im Bereich der nichtklassischen Verstärkung. Durchgezogene Kurve: exakt; gestrichelte Kurve: EDMN; strichpunktierte Kurve: DMN. Parameter:  $\Delta = 3g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,8g$ .

Beweis dafür erbracht werden, daß negative Erwartungswerte für die Pumpphotonenzahl überhaupt nicht in der EDMN auftreten. Die numerischen Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, legen jedoch diese Vermutung nahe.

### Ergebnisse für die Testabsorption

Im folgenden sollen die Ergebnisse der EDMN für die Testabsorption betrachtet werden, wobei besonderes Augenmerk auf den Bereich der nichtklassischen Verstärkung gelegt werden soll. Nach Abb. 3.5 liefert in diesem Bereich die DMN keine quantitativen Ergebnisse. Anders verhält es sich mit der EDMN. In Abb. 3.10 ist das exakte Ergebnis für die Testabsorption (durchgezogene Kurve) mit dem Ergebnis der EDMN (gestrichelte Kurve) im Bereich der nichtklassischen Verstärkung für ein kohärentes Pumpfeld verglichen. Hier ist nur der blauverschobene Teil der Testabsorption (Bereich A) gezeigt, auf den sich die Betrachtungen im folgenden konzentrieren sollen. Es zeigt sich eine gute quantitative Übereinstimmung der Ergebnisse der EDMN mit den exakten. Zusätzlich ist auch die mit der DMN berechnete Testabsorption eingezeichnet (strichpunktierte Kurve), die kein quantitatives Ergebnis im Bereich der nichtklassischen Verstärkung liefert.

Die Resultate der EDMN erweisen sich auch für gequetschte Pumpfelder als gut. Dies ist in Abb. 3.11 demonstriert, in der die exakte Testabsorption für (a) ein amplitudengequetschtes und (b) ein phasengequetschtes Pumpfeld mit den Ergebnissen der EDMN verglichen wird. Insbesondere wird der Einfluß der gequetschten Photonenstatistik auf die Linienform richtig in der EDMN beschrie-

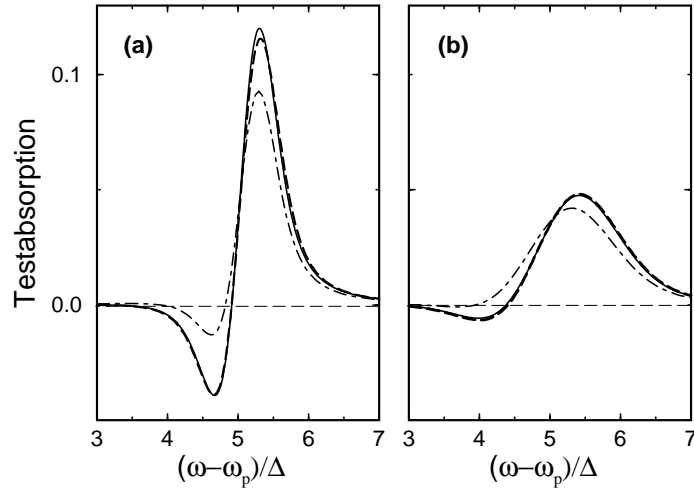


Abbildung 3.11: Testabsorption für  $N = 10$  und ein (a) amplitudengequetschtes ( $\xi = 0, 5$ ) und ein (b) phasengequetschtes ( $\xi = -0, 5$ ) Pumpfeld im Bereich der nichtklassischen Verstärkung. Durchgezogene Kurven: exakt; gestrichelte Kurven: EDMN; strichpunktierte Kurven: DMN. Parameter:  $\Delta = 3g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0, 8g$ .

ben. Die Testabsorption in DMN, die ebenfalls gezeigt ist (strichpunktierte Kurven), weicht auch für gequetschte Felder deutlich vom exakten Ergebnis ab.

Die EDMN verbessert auch das Ergebnis für Parameter, für die bereits die DMN gute Resultate geliefert hat, d. h. für Pumpverstimmungen in der Größenordnung der (mittleren) Rabifrequenz. Dazu sei nochmal Abb. 3.4.b betrachtet. In dem blauverschobenen Bereich stimmen bis auf eine kleine Verschiebung die exakte und genäherte Testabsorption gut überein. In Abb. 3.12 ist der blauverschobene Teil der Testabsorption aus Abb. 3.4.b für ein kohärentes Pumpfeld nochmal gezeigt, wobei hier zusätzlich das Ergebnis der EDMN eingezeichnet wurde. Die Verschiebung zwischen der Testabsorption in der DMN (strichpunktierte Kurve) und der exakten Testabsorption (durchgezogene Kurve) verschwindet in der EDMN (gestrichelte Kurve). Die Ergebnis der EDMN ist in Abb. 3.12 kaum vom exakten zu unterscheiden.

Als nächstes soll demonstriert werden, daß die anregungszahlerhaltende Entkopplung (3.33) im Vergleich zur Standardentkopplung (3.31) ein besseres Ergebnis im Bereich der nichtklassischen Verstärkung liefert. Dazu sind in Abb. 3.13 die Ergebnisse für beide Entkopplungen mit dem exakten verglichen. Während sich unter Benutzung der Standardentkopplung (3.31) keine quantitative Übereinstimmung mit dem exakten Ergebnis erzielen läßt (strichpunktierte Kurve), wird dieses bei Benutzung der anregungszahlerhaltenden Entkopplung gewährleistet (gestrichelte Kurve).

Folglich ist die volle Berücksichtigung der Paarkorrelationen plus die anregungszahlerhaltende Entkopplung der Dreierkorrelationen wesentlich für eine quantitative



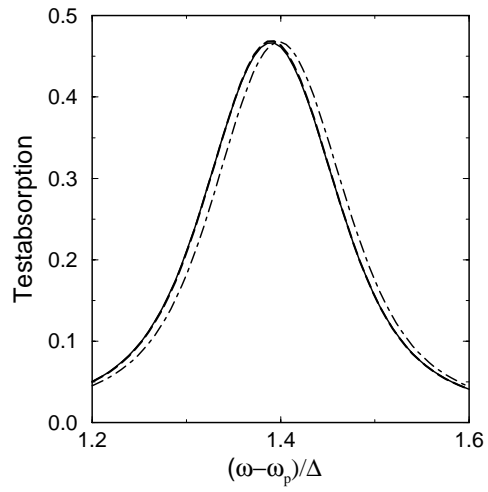


Abbildung 3.12: Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld mit den Parametern aus Abb. 3.4. Durchgezogene Kurve: exakt; gestrichelte Kurve: EDMN; strichpunktete Kurve: DMN.

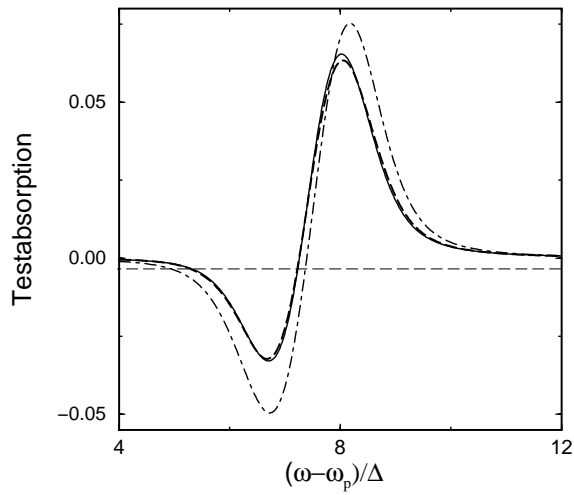


Abbildung 3.13: Testabsorption mit den Parametern aus Abb. 3.10; durchgezogene Kurve: exakt, strichpunktete Kurve: EDMN mit Standardentkopplung (3.31), gestrichelte Kurve: EDMN mit anregungszahlerhaltender Entkopplung (3.33).

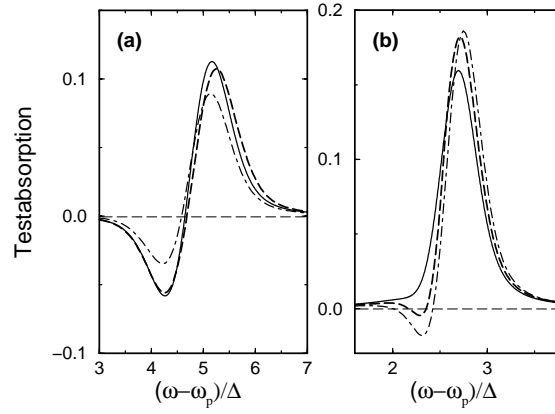


Abbildung 3.14: Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld mit  $N = 20$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,8g$  für (a)  $\Delta = 3g$ , (b)  $\Delta = 6g$ . Durchgezogene Kurven: exakt; strichpunktierte Kurven: DMN; gestrichelte Kurven: EDMN.

Beschreibung der Testabsorption im Bereich der nichtklassischen Verstärkung.

Abschließend sollen die Ergebnisse der EDMN für den Parameterbereich diskutiert werden, bei dem sich die Zahl  $N$  der TLS der mittleren Photonenzahl  $\langle n \rangle$  nähert. In Abb. 3.14 ist der blauverschobene Teil der Testabsorption für  $N/\langle n \rangle = 0,33$  und zwei unterschiedliche Pumpverstimungen gezeigt. Das Pumpfeld ist wieder in einem kohärenten Zustand. Die EDMN (gestrichelte Kurven) liefert keine quantitative Übereinstimmung mit den exakten Ergebnissen mehr. Allerdings verbessert sie weiterhin die Ergebnisse der DMN, die als strichpunktierte Kurven zu sehen sind. Um auch für große Verhältnisse  $N/\langle n \rangle$  gute Ergebnisse in einer Dichtematrixnäherung zu erzielen, müßten als nächste Erweiterung Dreierkorrelationen voll berücksichtigt werden. Da dies die Komplexität der Dichtematrixgleichungen nochmals erheblich steigern würde, ist dies im Rahmen der Arbeit nicht durchgeführt worden.

### 3.3.3 Zusammenfassung von Abschnitt 3.3

- Die volle Berücksichtigung von Korrelationen zwischen Paaren von TLS in den Dichtematrixgleichungen liefert eine quantitative Beschreibung der nichtklassischen Verstärkung.
- Die anregungszahlerhaltende Entkopplung verbessert die Ergebnisse der EDMN wesentlich im Vergleich zur Standardentkopplung.
- Nähert sich die Zahl der TLS der mittleren Photonenzahl, so werden höhere Korrelationen zwischen den TLS immer wichtiger. Die volle Berücksichtigung von Paarkorrelation reicht für eine quantitative Beschreibung der Testabsorption dann auch nicht mehr aus.

### 3.4 Zusammenfassung von Kapitel 3

In diesem Kapitel wurde eine Dichtematrixtheorie zur Berechnung des optischen Stark-Effekts in einem Pump-Test-Experiment für das Dicke-Modell vorgestellt. Das Pumpfeld wurde quantisiert behandelt.

Um ein endliches System von Dichtematrixgleichungen zu erhalten, besteht die einfachste Näherung in der Entkopplung von Paarkorrelationen zwischen TLS. Diese Näherung liefert bereits gute Ergebnisse für Pumpverstimmungen in der Größenordnung der Rabifrequenz und für eine Zahl  $N$  von TLS, die die mittlere Pumpphotonenzahl wesentlich unterschreitet. Insbesondere wird der Einfluß eines gequetschten Strahlungsfeldes auf die Linienform im optischen Stark-Effekt quantitativ richtig beschrieben.

Da die Entkopplung der Paarkorrelationen jedoch keine quantitative Beschreibung für die nichtklassischen Verstärkung gewährleistet, wurde ein erweitertes System von Dichtematrixgleichungen abgeleitet, bei dem erst Dreierkorrelationen genähert wurden. Insbesondere mußte hier darauf geachtet werden, daß die Entkopplungen höherer Korrelationen der Anregungszahlerhaltung genügen. Mit dieser Erweiterung konnte die nichtklassische Verstärkung erfolgreich im Rahmen einer Dichtematrixnäherung beschrieben werden.

Der Vorteil der Dichtematrixnäherung im Vergleich zu einer exakten Bestimmung der Testabsorption ist, daß der Berechnungsaufwand nicht mit der Zahl der TLS zunimmt. Die Dichtematrixnäherung eignet sich damit insbesondere zur Bestimmung der Testabsorption für große Zahlen von TLS, bei denen die exakte Berechnung nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Im nächsten Kapitel wird die hier vorgestellte DMN auf die Beschreibung des optischen Stark-Effekts an störstellengebundenen Exzitonen erweitert.

# Kapitel 4

## Der optische Stark-Effekt an störstellengebundenen Exzitonen

In Kapitel 2 dieser Arbeit wurde gezeigt, daß sich ein gequetschtes Pumpfeld in einem Pump-Test-Experiment zum optischen Stark-Effekt nachweisen läßt. Diese Messung setzt zum einen eine starke Kopplung des elektronischen Systems, sprich der Zwei-Niveau-Systeme (TLS), an Pumpphotonen voraus, die sich mit Hilfe eines geeigneten optischen Resonators realisieren läßt. Zum anderen dürfen Dissipationsprozesse die Dynamik des Systems nicht dominieren, da letztere zu einer unerwünschten zusätzlichen Verbreiterung der verschobenen Resonanzen führen. Die effektive Dissipationsrate sollte die Kopplungskonstante  $g$ , welche die Stärke der Wechselwirkung mit den Pumpphotonen charakterisiert, nicht wesentlich überschreiten.

In Halbleitern kann die zweite Voraussetzung von Resonanzen störstellengebundener Exzitonen erfüllt werden, da diese im Vergleich zu freien Exzitonen kleine homogene und inhomogene Linienbreiten aufweisen. Zudem haben störstellengebundene Exzitonen große Dipolmatrixelemente, die die Kopplungskonstante  $g$  günstig beeinflussen können.

Vom theoretischen Standpunkt aus gesehen sind störstellengebundene Exzitonen leicht modellierbar, da sie sich wie unabhängige TLS verhalten. Für freie Exzitonen wäre es eine grobe Näherung, sie als unabhängige TLS zu beschreiben. Allerdings weisen die Resonanzen störstellengebundener Exzitonen eine inhomogene Verbreiterung auf, die durch die individuellen Umgebungen der einzelnen Störstellen verursacht wird. Diese inhomogene Verbreiterung muß in die theoretische Behandlung einbezogen werden.

In diesem Kapitel soll ein mögliches Pump-Test-Experiment an störstellengebundenen Exzitonen (kurz: gebundene Exzitonen oder BX) diskutiert werden, das dem Nachweis einer gequetschten Photonenstatistik dient. Dazu wird im ersten Abschnitt ein Überblick über die Eigenschaften störstellengebundener Exzitonen gegeben. Im zweiten Abschnitt wird eine Erweiterung der Dichtematrixnäherung (DMN) aus Kapitel 3 vorgenommen, welche die inhomogene Verbreiterung der

BX einbezieht. Die Gültigkeit der DMN wird durch den Vergleich mit exakten Ergebnissen für kleine Ensembles von Störstellen nachgewiesen. Da in der nicht-linearen Halbleiterspektroskopie in der Regel gepulste Lichtfelder verwendet werden, soll im dritten Abschnitt der zusätzliche Einfluß endlicher Pulsdauern auf die Linienform im optischen Stark-Effekt an BX diskutiert werden.

Im vierten Abschnitt wird besonderes Augenmerk auf den Einfluß dissipativer Effekte gelegt. Es wird gezeigt, wie sich diese im Rahmen einer Mastergleichung für einen reduzierten Dichteoperator einbeziehen lassen. Anschließend wird der Einfluß der dissipativen Effekte im Pump-Test-Experiment analysiert.

## 4.1 Störstellengebundene Exzitonen

Exzitonen stellen elementare Anregungen eines Halbleiters dar. Ein Exziton besteht aus einem Elektron-Loch-Paar, welches durch die Coulombwechselwirkung gebunden ist. Im Absorptions- oder Transmissionsspektrum eines Halbleiters machen sich Exzitonen als charakteristische Resonanzen unterhalb der Energie der Bandlücke bemerkbar, wobei die Energiedifferenz zwischen einer Exziton-Resonanz und der Bandkante gerade die Bindungsenergie des jeweiligen Exzitonzustands bestimmt.

Die Exzitonzustände in Halbleitern werden durch die Wannier-Gleichung bestimmt [68], welche analog zur Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom ist. Die Bindungsenergien der Exzitonen sind jedoch wesentlich kleiner als die des Wasserstoffatoms, was an der kleinen reduzierten Masse eines Elektron-Loch-Paares im Vergleich zur reduzierten Masse eines Wasserstoffatoms liegt. Zudem wird die Coulombwechselwirkung im Halbleiter durch die bei optischer Anregung entstehenden Ladungsträger abgeschirmt. Abhängig vom Halbleitermaterial liegt die Exzitonbindungsenergie in der Größenordnung von 1 – 100 meV. Dabei weisen die II-VI-Halbleiter aufgrund ihrer kleineren dielektrischen Konstanten eine um eine Größenordnung höhere Bindungsenergie des Exzitongrundzustands auf als die III-V-Halbleiter. Zum Beispiel beträgt die Exzitonbindungsenergie in dem ‘klassischen’ III-V-Halbleitermaterial GaAs 4,2 meV, während sie im II-VI-Halbleiter CdS einen Wert von 27 meV hat [69].

Bei einem störstellengebundenen Exziton handelt es sich um ein gebundenes Elektron-Loch-Paar, welches im Gegensatz zum freien Exziton zusätzlich an eine Störstelle eines dotierten Halbleiters gebunden ist. Dabei wird zwischen akzeptorgebundenen und donatorgebundenen Exzitonen unterschieden, die mit  $(A^0, X)$  und  $(D^0, X)$  bezeichnet werden. Ebenso kann ein Exziton auch an eine geladene Störstelle gebunden werden. Die Existenz von störstellengebundenen Exzitonen wurde 1958 von Lampert theoretisch vorhergesagt [70].

Im Absorptions- oder Transmissionsspektrum machen sich störstellengebundene Exzitonen als scharfe Linien bemerkbar, die sich auf der rotverschobenen Seite der freien Exzitonresonanz befinden [71]. In CdS liegen beispielsweise für

eine Polarisierung des Lichtfeldes senkrecht zur kristallographischen Achse die sogenannten  $I_1$ -Linien des akzeptorgebundenen Exzitons ungefähr 15 meV rotverschoben bezüglich der freien Exzitonlinie, während die sogenannten  $I_2$ -Linien der donatorgebundenen Exzitonen um einige meV von der freien Exzitonresonanz verschoben sind [72].

Eine wichtige Eigenschaft von gebundenen Exzitonen bezieht sich auf ihre große Oszillatorstärke ('giant oscillator strength'). Beispielsweise sind in einer Arbeit von Henry und Nassau im Jahre 1970 Lebensdauermessungen von BX in CdS durchgeführt worden, die auf Dipolmatrixelemente der Größenordnung  $e \cdot (0,3 - 4,0 \text{ nm})$  schließen lassen [32]. Dies sind im Vergleich zu atomaren Dipolmatrixelementen sehr große Werte.

Später durchgeführte Vierwellenmischexperimente wiesen die großen Dephasierungszeiten für störstellengebundene Exzitonen (BX) aus. Bei BX in CdS sind Dephasierungszeiten in der Größenordnung von ungefähr 1 ns gemessen worden [31]. Für die homogene Verbreiterung sind aus experimentellen Daten Werte knapp unter einem  $\mu\text{eV}$  abgeschätzt worden, während die inhomogene Verbreiterung einige 10  $\mu\text{eV}$  beträgt [73]. Damit stellen störstellengebundene Exzitonen ausgesprochen scharfe Resonanzen in Halbleitern dar.

Weiter haben Experimente zur selbstinduzierten Transparenz an BX in CdS klar gezeigt, daß sich bei kleinen Störstellenkonzentrationen von  $10^{14}$  bis  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$  und bei moderaten Anregungsdichten BX wie unabhängige TLS verhalten [74]. Unter der Annahme unabhängiger TLS ließen sich auch die Daten der Vierwellenmischexperimente an BX interpretieren. Die Modellierung von BX als Ensemble unabhängiger TLS mit inhomogener Verbreiterung wird in den theoretischen Behandlungen der folgenden Abschnitte ausgenutzt.

## 4.2 Dichtematrixtheorie für störstellengebundene Exzitonen

In diesem Abschnitt wird der optische Stark-Effekt an störstellengebundenen Exzitonen (BX) im Rahmen einer Dichtematrixtheorie behandelt. Es wird, wie bereits erwähnt, ausgenutzt, daß sich BX wie unabhängige TLS verhalten. Die inhomogene Verbreiterung der BX, die aufgrund der individuellen Umgebung jeder Störstelle entsteht, wird berücksichtigt.

Wird angenommen, daß die BX auf einen Raumbereich lokalisiert sind, der klein gegen die optische Wellenlänge ist, so beschreibt der folgende Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$  die Wechselwirkung von  $N$  BX mit dem quantisierten Pumpfeld:

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\omega\mathcal{K} + \hbar \sum_{\nu=1}^N \Delta_{\nu} J_{\nu,3} + \hbar g(aJ_+ + a^\dagger J_-). \quad (4.1)$$

Die Bezeichnungen aus Kapitel 2 wurden hier übernommen. Als neue Bezeichnung wurde  $\Delta_{\nu}$  als Verstimmung des Pumpfeldes gegenüber der Resonanz des BX an der Störstelle  $\nu$  eingeführt. Dabei hängt  $\Delta_{\nu}$  von der individuellen Umgebung der Störstelle  $\nu$  ab.

Die Kopplung an das Testfeld, welches wie in Kapitel 2 klassisch behandelt werden soll, wird gegeben durch

$$\mathcal{V} = \hbar\tilde{g}(A(t)e^{-i\omega t}J_+ + J_-A^*(t)e^{i\omega t}). \quad (4.2)$$

Die  $\nu$ -Abhängigkeit der Verstimmungen  $\Delta_{\nu}$  hat zur Folge, daß  $\mathcal{H}_0$  nicht mehr mit dem Gesamtdrehimpuls  $J^2$  aus (2.8) vertauscht, während die Vertauschung mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  aus (2.7) weiterhin gewährleistet ist. Die für die Bestimmung der ‘Dressed States’ zu diagonalisierenden Untermatrizen von  $\mathcal{H}_0$  sind von der maximalen Dimension  $2^N$ , während für das in Kapitel 2 betrachtete homogene Ensemble von TLS die maximale Dimension durch  $2N + 1$  gegeben war. Mit Hilfe der ‘Dressed States’ läßt sich auch hier unter Benutzung der Gleichung (2.17) die Testabsorption exakt bestimmen. Da die Dimension der zu diagonalisierenden Matrizen exponentiell mit der Zahl der relevanten Störstellen  $N$  anwächst, ist die exakte Bestimmung der Testabsorption nur für kleine Zahlen  $N$  möglich. Für größere Zahlen  $N$  soll die Berechnung im Rahmen einer Dichtematrixnäherung durchgeführt werden, bei der wie in Abschnitt 3.1 Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS näherungsweise entkoppelt werden.

### 4.2.1 Ableitung der Dichtematrixgleichungen

Für die Ableitung der Dichtematrixgleichungen wird ein Anfangszustand angenommen, bei dem keine BX angeregt sind. Da für diesen Anfangszustand nach Gleichung (2.17) der lineare Anteil im Testfeld von  $\langle J_-(t) \rangle$  nur von der Photonstatistik abhängt, reicht die Bestimmung der in (3.3) definierten Größen

$\langle J_-(t) \rangle_n$  linear im Testfeld aus. Der Index  $n$  bezeichnet den Erwartungswerte für ein Pumpfeld mit  $n$  Photonen. Für  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle$  gilt

$$\langle J_-^{(1)}(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n. \quad (4.3)$$

Aufgrund der inhomogenen Verbreiterung ist es hier nötig, die Bewegungsgleichungen für den Erwartungswert  $\langle J_{\nu,-}(t) \rangle_n$  abzuleiten, der sich auf die  $\nu$ -te Störstelle bezieht. Der für die lineare Testabsorption zu bestimmende Wert  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n$  folgt dann aus:

$$\langle J_-^{(1)}(t) \rangle_n = \sum_{\nu=1}^N \langle J_{\nu,-}^{(1)}(t) \rangle_n. \quad (4.4)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \phi_\nu &= (J_{\nu,-}, aJ_{\nu,3}, a^2J_{\nu,+})^T \\ \langle \phi_\nu \rangle_n^{(\mu)} &= \langle \phi_\nu (\mathcal{K} - n)^\mu \rangle_n \text{ für } \mu = 0, 1, 2, \dots, \\ \psi_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum_{\nu' \neq \nu} (J_{\nu',3} J_{\nu,-} + J_{\nu,3} J_{\nu',-}) \\ -\frac{1}{2}a + 2 \sum_{\nu' \neq \nu} (aJ_{\nu',3} J_{\nu,3} - aJ_{\nu,+} J_{\nu',-}) \end{pmatrix} \\ \langle \psi_\nu \rangle_n^{(\mu)} &= \langle \psi_\nu (\mathcal{K} - n)^\mu \rangle_n, \text{ für } \mu = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

folgen die Dichtematrixgleichungen zu

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \omega_p + \mathbf{M}_{\nu,n}) \langle \phi_\nu \rangle_n^{(\mu)} + \mathbf{D} \langle \phi_\nu \rangle_n^{(\mu+1)} + g \langle \psi_\nu \rangle_n^{(\mu)} &= \\ &= \tilde{g} A e^{-i\omega t} (\delta_{\mu,0} \langle \mathbf{I}_{\nu,0} \rangle_n + (1 - \delta_{\mu,0}) \langle \mathbf{I}_{\nu,1} \rangle_n) \\ &\text{für } \mu = 0, 1, 2, \dots; \nu = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Matrizen  $\mathbf{M}_{\nu,n}$  und  $\mathbf{D}$  sind gegeben durch

$$\mathbf{M}_{\nu,n} = \begin{pmatrix} -\Delta_\nu & 2g & 0 \\ g(n - \frac{N}{2}) & 0 & -g \\ 0 & -2g(n - \frac{N}{2}) & \Delta_\nu \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & -2g & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Die Vektoren  $\mathbf{I}_{\nu,0}$  und  $\mathbf{I}_{\nu,1}$ , die in der Inhomogenität auftreten, sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\nu,0} &= (-2J_{\nu,3}, J_{\nu,+}, 0)^T \\ \mathbf{I}_{\nu,1} &= (J_{\nu,-} J_+, aJ_{\nu,3} J_+, a^2 J_{\nu,+} J_+)^T. \end{aligned} \quad (4.9)$$



Weiter wird die Bewegungsgleichung für  $\langle a \rangle_n^{(\mu)}$  benötigt:

$$(i\partial_t - \omega_p) \langle a \rangle_n^{(\mu)} - g \sum_{\nu'} \langle J_{\nu',-} \rangle_n^{(\mu)} = \tilde{g} A e^{-i\omega t} (1 - \delta_{\mu,0}) \sum_{\nu'} \langle a J_{\nu',+} \rangle_n. \quad (4.10)$$

Um ein geschlossenes System von Gleichungen zu erhalten, werden wie in Abschnitt 3.1 Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS nach (3.11) entkoppelt. Werden nach der Entkopplung nur Terme linear im Testfeld berücksichtigt, so gehen die Bewegungsgleichungen (4.6) über in

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \omega_p + \mathbf{M}_{\nu,n}) \langle \phi_\nu^{(1)} \rangle_n^{(\mu)} + \mathbf{D} \langle \phi_\nu^{(1)} \rangle_n^{(\mu+1)} + g \sum_{\nu' \neq \nu} \mathbf{L}_{\nu',1}(t) \langle \phi_{\nu'}^{(1)} \rangle_n^{(\mu)} \\ + g \mathbf{L}_{\nu,2}(t) \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \phi_{\nu'}^{(1)} \rangle_n^{(\mu)} + g \mathbf{v}_\nu(t) \langle a^{(1)} \rangle_n^{(\mu)} = \\ = \tilde{g} A e^{-i\omega t} (\delta_{\mu,0} \langle \mathbf{I}_{\nu,0}(t) \rangle_n + (1 - \delta_{\mu,0}) \langle \mathbf{I}_{\nu,1}(t) \rangle_n). \end{aligned} \quad (4.11)$$

für  $\mu = 0, 1, 2, \dots; \nu = 1, \dots, N$ .

Hier sind die  $\nu$ -abhängigen Matrizen  $\mathbf{L}_{\nu,1}(t)$  und  $\mathbf{L}_{\nu,2}(t)$  gegeben durch:

$$\mathbf{L}_{\nu,1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\langle J_{\nu,3} \rangle_n & 0 & 0 \\ 0 & 2\langle J_{\nu,3} \rangle_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{L}_{\nu,2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\langle J_{\nu,3} \rangle_n & 0 & 0 \\ -2\langle a J_{\nu,+} \rangle_n \delta_{\mu,0} & 2\langle J_{\nu,3} \rangle_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Die Erwartungswerte in den Komponenten dieser Matrizen sind dabei in nullter Ordnung im Testfeld zu bestimmen. Dies gilt ebenso für die Komponenten der Vektoren  $\langle \mathbf{I}_{\nu,0}(t) \rangle_n$ ,  $\mathbf{v}_\nu(t)$  und  $\langle \mathbf{I}_{\nu,1}(t) \rangle_n$ , wobei die beiden letzteren nach der Entkopplung gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\nu(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \left( \frac{1}{4} + \langle J_{\nu,3} \rangle_n \sum_{\nu' \neq \nu} \langle J_{\nu',3} \rangle_n \right) \end{pmatrix}, \\ \langle \mathbf{I}_{\nu,1}(t) \rangle_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \langle J_{\nu,3} \rangle_n \\ \frac{1}{2} \langle a J_{\nu,+} \rangle_n + \langle J_{\nu,3} \rangle_n \sum_{\nu' \neq \nu} \langle a J_{\nu',+} \rangle_n \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aufgrund der Anfangsbedingung  $\langle \phi^{(1)}(t_0) \rangle_n^{(\mu)} = 0$  und  $\langle a^{(1)}(t_0) \rangle_n^{(\mu)} = 0$  und der  $\mu$ -unabhängigen Inhomogenität für  $\mu \geq 1$  läßt sich das unendliche Differentialgleichungssystem (4.11) mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \langle \phi_\nu^{(1)}(t) \rangle_n^{(\mu)} &= \tilde{g} (\delta_{\mu,0} \chi_{\nu,n}(t) + (1 - \delta_{\mu,0}) \zeta_{\nu,n}(t)) A e^{-i\omega t}, \\ \langle a^{(1)}(t) \rangle_n^{(\mu)} &= \tilde{g} (\delta_{\mu,0} \lambda_0(t) + (1 - \delta_{\mu,0}) \lambda_1(t)) A e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (4.15)$$

in ein endliches Differentialgleichungssystem überführen. Da für die Berechnung der Testabsorption nur die zeitgemittelten Größen  $\overline{\chi_{\nu,n}(t)}$  für  $\nu = 1, \dots, N$  ermittelt werden müssen, läßt sich wie in Kapitel 3 die Zeitmittelung direkt in den Differentialgleichungen ausführen. Mit den zusätzlichen Näherungen

$$\begin{aligned} \overline{L_{\nu',1}(t)\chi_{\nu,n}(t)} &\simeq \overline{L_{\nu',1}(t)} \overline{\chi_{\nu,n}(t)} \\ \overline{L_{\nu,2}(t)\chi_{\nu',n}(t)} &\simeq \overline{L_{\nu,2}(t)} \overline{\chi_{\nu',n}(t)} \\ \overline{v_\nu(t)\lambda_0(t)} &\simeq \overline{v_\nu(t)} \overline{\lambda_0(t)} \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (4.16)$$

folgt ein abgeschlossenes lineares Gleichungssystem für die zeitgemittelten Größen. Als Eingangsgrößen sind die Zeitmittel der Inversionen  $\langle J_{\nu,3} \rangle_n$  und der photon-assistierten Polarisationen  $\langle aJ_{\nu,+} \rangle_n$  für  $\nu = 1, \dots, N$  in nullter Ordnung im Testfeld zu bestimmen. Die Dichtematrixgleichungen für diese Größen werden weiter unten abgeleitet.

Im Gegensatz zu dem in Kapitel 3 behandelten homogenen Fall ist hier die Anzahl der zu lösenden Dichtematrixgleichungen für die Testabsorption nicht mehr unabhängig von der Zahl der relevanten Störstellen  $N$ , sondern wächst linear mit  $N$  an. Allerdings ist der Berechnungsaufwand zur Lösung der Dichtematrixgleichungen erheblich geringer als die exakte Berechnung, bei der Matrizen der Dimension  $2^N$  zu diagonalisieren sind.

### Anregungszahlerhaltende Entkopplung

Für die Ableitung eines geschlossenen Systems von Dichtematrixgleichungen sind oben Korrelationen zwischen unterschiedlichen BX unter Benutzung des Standardschemas (3.11) entkoppelt worden. Diese Entkopplung verletzt jedoch in mehreren Fällen die Anregungszahlerhaltung. Ein Beispiel dafür betrifft die Entkopplung der Korrelationen  $\langle aJ_{\nu,+}J_{\nu',-} \rangle_n$ . Der Operator  $aJ_{\nu,+}J_{\nu',-}$  erfüllt (3.34) und ändert somit die Anregungszahl um  $-1$ . Nach der Entkopplung des Erwartungswertes gemäß (3.11) tritt auf der rechten Seite der Term  $\langle aJ_{\nu',-} \rangle_n \langle J_{\nu,+} \rangle_n$  auf. Da die Operatoren in diesen beiden Erwartungswerten weder die Anregungszahl um  $-1$  ändern, noch mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  vertauschen, genügt die Entkopplung nicht der Anregungszahlerhaltung. Ein zweites Beispiel betrifft den Erwartungswert  $\langle J_{\nu,+}J_{\nu',-} \rangle_n$ . Die Entkopplung lautet nach (3.11):

$$\langle J_{\nu,+}J_{\nu',-} \rangle_n \simeq \langle J_{\nu,+} \rangle_n \langle J_{\nu',-} \rangle_n. \quad (4.17)$$

Die Anregungszahlerhaltung ist hier wiederum verletzt, da  $J_{\nu,+}J_{\nu',-}$  mit  $\mathcal{K}$  vertauscht, dies aber nicht für die Operatoren  $J_{\nu,+}$  und  $J_{\nu',-}$  gilt.

Da bei der Standardentkopplung die Anregungszahlerhaltung für einige Terme verletzt wird, sollen hier auch die Ergebnisse für ein alternatives anregungszahlerhaltendes Entkopplungsschema diskutiert werden. Dazu wird analog zu der in Abschnitt 3.3 diskutierten anregungszahlerhaltenden Entkopplung der Dreierkorrelationen verfahren. Die zu entkoppelnden Erwartungswerte sind hier Paarkor-

relationen der Form  $\langle J_{1,\nu} J_{2,\nu'} C \rangle_n$  mit  $\nu' \neq \nu$ . Hier sind  $J_{1,\nu}$  und  $J_{2,\nu'}$  zwei  $J$ -Operatoren aus  $\{J_{\nu,+}, J_{\nu,-}, J_{\nu,3}\}$  bzw.  $\{J_{\nu',+}, J_{\nu',-}, J_{\nu',3}\}$ .  $C$  ist ein globaler Operator, der sich aus  $a^\dagger$ ,  $a$  und  $\mathcal{K}$  zusammensetzt. Für die Entkopplung wird  $C$  zerlegt:

$$C = C_1 C_2, \quad (4.18)$$

so daß die Entkopplung

$$\langle C J_{1,\nu} J_{2,\nu'} \rangle_n \simeq \langle C_1 J_{1,\nu} \rangle_n \langle C_2 J_{2,\nu'} \rangle_n \quad (4.19)$$

anregungszahlerhaltend ist. Mit der Forderung nach einer anregungszahlerhaltenden Entkopplung kann insbesondere der Erwartungswert  $\langle J_{\nu,+} J_{\nu',-} \rangle_n$  nicht entkoppelt werden. Mit anregungszahlerhaltender Entkopplung folgt für die Matrizen  $\mathbf{L}_{\nu,1}(t)$  und  $\mathbf{L}_{\nu,2}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\nu,1}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\langle J_{\nu',3} \rangle_n & 0 & 0 \\ 0 & 2\langle J_{\nu',3} \rangle_n & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_{\nu,2}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\langle J_{\nu,3} \rangle_n & 0 & 0 \\ -2\langle a J_{\nu,+} \rangle_n & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Für die Vektoren  $\mathbf{v}_\nu(t)$  und  $\langle \mathbf{I}_\nu^{(1)}(t) \rangle_n$  gilt nach anregungszahlerhaltender Entkopplung:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\nu(t) &= \left( 0, 0, -\frac{1}{2}g \right)^T \\ \langle \mathbf{I}_\nu^{(1)}(t) \rangle_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \langle J_{\nu,3} \rangle_n + \sum_{\nu' \neq \nu} \langle J_{\nu,-} J_{\nu',+} \rangle_n \\ \frac{1}{2} \langle a J_{\nu,+} \rangle_n + \sum_{\nu' \neq \nu} \langle a J_{\nu',+} \rangle_n \langle J_{\nu,3} \rangle_n \\ \sum_{\nu' \neq \nu} \langle a J_{\nu',+} \rangle_n \langle a J_{\nu,+} \rangle_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Als Eingangsgrößen für die resultierenden Gleichungen zur Berechnung der linearen Testabsorption sind die Inversionen  $\langle J_{\nu,3} \rangle_n$ , die photonassistierten Polarisationen  $\langle a J_{\nu,+} \rangle_n$  und zusätzlich die Korrelationen  $\langle J_{\nu,-} J_{\nu',+} \rangle_n$  für  $\nu' \neq \nu$  in nullter Ordnung im Testfeld zu bestimmen. Die Dichtematrixgleichungen für diese Eingangsgrößen werden im folgenden Teilabschnitt abgeleitet.

### Dichtematrixgleichungen für die Inversion

Mit den hermiteschen Operatoren

$$\begin{aligned} p_\nu^{(+)} &= a J_{\nu,+} + a^\dagger J_{\nu,-}, & p_\nu^{(-)} &= -i(a J_{\nu,+} - a^\dagger J_{\nu,-}), \\ c_{\nu,\nu'}^{(+)} &= J_{\nu,+} J_{\nu',-} + J_{\nu',+} J_{\nu,-}, & c_{\nu,\nu'}^{(-)} &= -i(J_{\nu,+} J_{\nu',-} - J_{\nu',+} J_{\nu,-}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

lauten die Dichtematrixgleichungen für die Inversionen  $\langle J_{\nu,3} \rangle_n$  und die photonassisierten Polarisationen  $\langle aJ_{\nu,+} \rangle_n$  in nullter Ordnung im Testfeld:

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle J_{\nu,3} \rangle_n &= g \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_n \\
\partial_t \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_n &= -\Delta_{\nu} \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_n + g \sum_{\nu' \neq \nu} \langle c_{\nu,\nu'}^{(-)} \rangle_n \\
\partial_t \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_n &= \Delta_{\nu} \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_n - 4g \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \langle J_{\nu,3} \rangle_n + \\
&\quad + 4g \sum_{\nu' \neq \nu} \langle J_{\nu',3} J_{\nu,3} \rangle_n - g \sum_{\nu' \neq \nu} \langle c_{\nu,\nu'}^{(+)} \rangle_n.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Um ein abgeschlossenes System von Gleichungen zu erhalten, werden auch hier Korrelationen zwischen unterschiedlichen TLS näherungsweise entkoppelt. Wird dazu die Standardentkopplung in (3.11) benutzt, so folgt:

$$\begin{aligned}
\langle J_{\nu,3} J_{\nu',3} \rangle_n &\simeq \langle J_{\nu,3} \rangle_n \langle J_{\nu',3} \rangle_n \\
\langle J_{\nu,+} J_{\nu',-} \rangle_n &\simeq \langle J_{\nu,+} \rangle_n \langle J_{\nu',-} \rangle_n.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Insbesondere ist in dieser Entkopplung in nullter Ordnung im Testfeld  $\langle c_{\nu,\nu'}^{(\pm)}(t) \rangle_n \simeq 0$ .

Wird die anregungszahlerhaltende Entkopplung (4.19) angewandt, so müssen weitere Dichtematrixgleichungen für  $\langle c_{\nu,\nu'}^{(\pm)}(t) \rangle_n$  aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle c_{\nu,\nu'}^{(+)} \rangle_n &= -(\Delta_{\nu} - \Delta_{\nu'}) \langle c_{\nu,\nu'}^{(-)} \rangle_n - 2g(\langle p_{\nu'}^{(-)} \rangle_n \langle J_{\nu,3} \rangle_n + \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_n \langle J_{\nu',3} \rangle_n) \\
\partial_t \langle c_{\nu,\nu'}^{(-)} \rangle_n &= (\Delta_{\nu} - \Delta_{\nu'}) \langle c_{\nu,\nu'}^{(+)} \rangle_n - 2g(\langle p_{\nu'}^{(+)} \rangle_n \langle J_{\nu,3} \rangle_n - \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_n \langle J_{\nu',3} \rangle_n).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

In diesen Gleichungen sind bereits anregungszahlerhaltende Entkopplungen von Korrelationen zwischen unterschiedlichen BX gemäß (4.19) durchgeführt worden. Die Zahl der zu lösenden Differentialgleichungen in nullter Ordnung im Testfeld vergrößert sich bei anregungszahlerhaltender Entkopplung von  $3N$  auf  $N(N+2)$ .

## 4.2.2 Ergebnisse der Dichtematrixnäherung

Um mit Hilfe der obigen Dichtematrixnäherung Testabsorptionsspektren für BX zu berechnen, muß zunächst die Verteilung der Energieniveaus der BX klassifiziert werden. Da die Energie einer BX-Resonanz von der zufälligen lokalen Umgebung der entsprechenden Störstelle abhängt, sind die Verstimmungen  $\{\Delta_\nu; \nu = 1, \dots, N\}$  für ein Ensemble von  $N$  Störstellen von Probe zu Probe verschieden.

Im Grenzfall einer großen Zahl von Störstellen genügt die Verteilung der Energieniveaus der BX und damit die Verteilung der Verstimmungen einer Gaußverteilung. Die Breite der Gaußverteilung legt die inhomogene Verbreiterung  $\Gamma \neq 0$  fest. Um den Gaußcharakter der inhomogenen Verteilung der  $N$  BX-Resonanzen zu simulieren, wird die Frequenzachse in  $N + 1$  Intervalle eingeteilt, so daß die Wahrscheinlichkeit, eine BX-Resonanz in einem bestimmten Intervall anzutreffen, für alle Intervalle gleich groß ist. Die Intervalle werden durch  $[\Delta_{\nu-1}, \Delta_\nu]$  für  $\nu = 1, 2, \dots, N + 1$  gegeben, wobei  $\Delta_0 = -\infty$ ,  $\Delta_{N+1} = \infty$  festgelegt wird. Die restlichen Intervallgrenzen  $\Delta_\nu$  mit  $\Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_N$  werden durch folgende Beziehungen bestimmt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\Delta_1} dz g(z) &= \frac{1}{N+1}, \\ \int_{\Delta_{\nu-1}}^{\Delta_\nu} dz g(z) &= \frac{1}{N+1} \text{ für } \nu = 2, \dots, N, \\ \text{mit } g(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\Gamma^2}} \exp\left(-2\frac{(z-\Delta)^2}{\Gamma^2}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

und hängen somit von der inhomogenen Verbreiterung  $\Gamma$  und der mittleren Pumpverstimmung  $\Delta$  ab.

Eine spezielle Verteilung von Verstimmungen  $\{\Delta_\nu, \nu = 1, 2, \dots, N\}$ , die den Gaußcharakter der inhomogenen Verbreiterung näherungsweise beschreibt, ist bereits durch die Intervallgrenzen  $\Delta_\nu$  für  $\nu = 1, 2, \dots, N$  gegeben. Für  $\Gamma = 0$  werden die Verstimmungen so gewählt, daß  $\Delta_\nu = \Delta$  für alle  $\nu$  gilt.

Alternativ zur Berechnung des Testabsorptionsspektrums für die spezielle Verteilung (4.26) kann die inhomogene Verbreiterung der BX-Resonanzen auch so simuliert werden, daß die Verstimmungen  $\{\Delta_\nu; \nu = 1, \dots, N\}$  mit Hilfe von  $N$  Zufallszahlen zwischen Null und Eins ausgewählt werden. Dabei legt eine Zufallszahl  $p_\nu$  die Verstimmung  $\Delta_\nu$  über die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\Delta_\nu} dz g(z) = p_\nu \quad (4.27)$$

fest. Bei häufiger Wiederholung einer solchen Berechnung kann dann ein gemitteltes Spektrum bestimmt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde festgestellt, daß dieses gemittelte Testabsorptionsspektrum nur sehr wenig von dem Testabsorptionsspektrum für die spezielle Verteilung (4.26) abweicht, solange mindestens

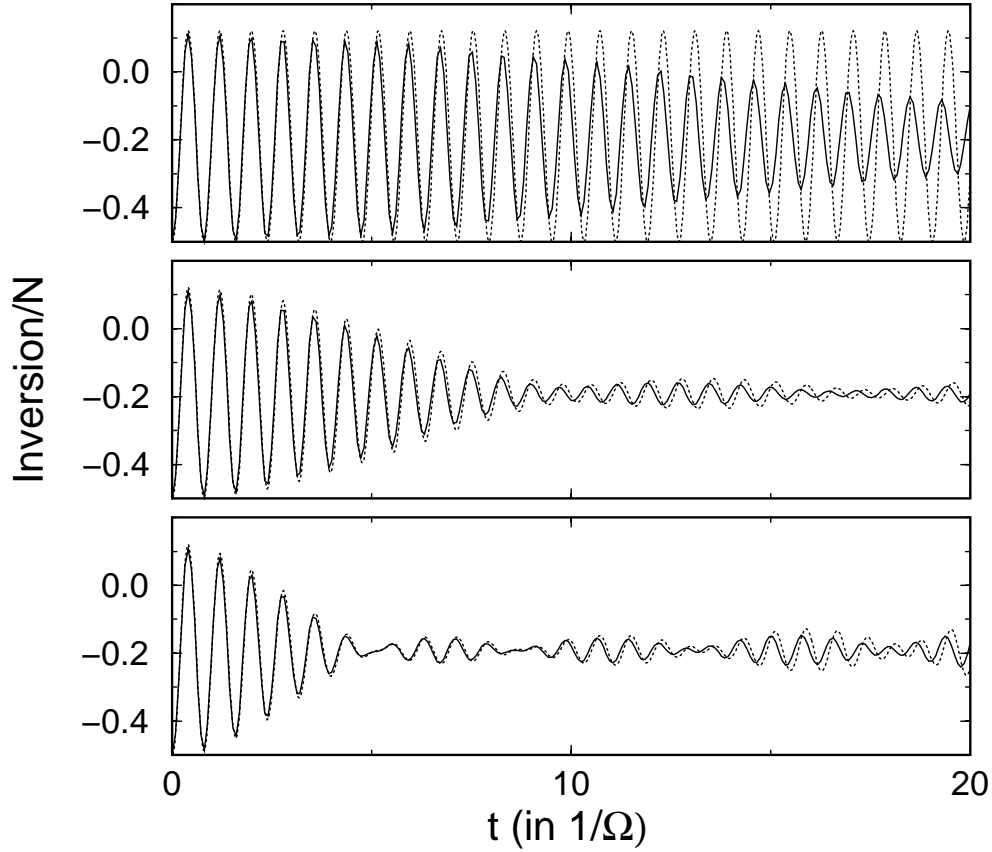


Abbildung 4.1: Zeitentwicklung der Inversion für unterschiedliche inhomogene Verteilungen. Oberes Bild:  $\Gamma = 0,1g$ ; mittleres Bild:  $\Gamma = 2g$ ; unteres Bild:  $\Gamma = 4g$ . Das Pumpfeld ist in einem Fockzustand mit  $n = 60$  Photonen. Parameter:  $N = 7$ ,  $\Delta = 12g$ . Durchgezogene Kurven: exakt; gepunktete Kurven: DMN.

zehn Störstellen betrachtet werden und die homogene Verbreiterung  $\gamma$  die Kopplungskonstante  $g$  um nicht mehr als eine Größenordnung unterschreitet. Deshalb sind hier ausschließlich Ergebnisse für die spezielle Verteilung der  $\{\Delta_\nu\}$  gezeigt, die durch (4.26) festgelegt wird.

### Ergebnisse für die Inversion

Zunächst sollen die Ergebnisse der Dichtematrixgleichungen für die Inversion der BX in nullter Testfeldordnung  $\langle J_3(t) \rangle$  betrachtet werden. Letztere liefert eine der Eingangsgrößen zur Berechnung der Testabsorption.

In Abb. 4.1 ist die exakte Zeitentwicklung der Inversion mit der genäherten für drei unterschiedliche inhomogene Verteilungen verglichen. Das Pumpfeld wurde in einem Fockzustand angenommen. Es wurden die Dichtematrixgleichungen in der Standardentkopplung nach (4.24) benutzt.

Für alle drei inhomogenen Verteilungen erfolgt ein Kollaps der Rabioszil-

Inhomogene Verbreiterung $\Gamma$	$0, 1g$	$2g$	$4g$
$\overline{\langle J_3(t) \rangle}$ exakt	-0, 1935	-0, 1924	-0, 1917
$\overline{\langle J_3(t) \rangle}$ mit Standardentkopplung (4.24)	-0, 1877	-0, 1911	-0, 1905
$\overline{\langle J_3(t) \rangle}$ mit anregungszahlerh. Entkopplung (4.19)	-0, 1936	-0, 1920	-0, 1912

Tabelle 4.1: Zeitgemittelte Inversion (exakt und DMN) für Parameter aus Abb. 4.1.

lation, der umso eher einsetzt, je größer die inhomogene Verbreiterung ist. Dies kann sofort anschaulich verstanden werden, wenn beachtet wird, daß jedes BX eine individuelle verallgemeinerte Rabifrequenz hat, die für die Störstelle  $\nu$  durch

$$\tilde{\Omega}_\nu = \sqrt{4g^2 \langle n \rangle + \Delta_\nu^2} \quad (4.28)$$

gegeben wird. Da sich Rabioszillationen mit unterschiedlicher Frequenz überlagern, erfolgt ein Kollaps der Oszillation. Da sich die verallgemeinerten Rabifrequenzen umso stärker bezüglich der einzelnen Störstellen unterscheiden, je größer die inhomogene Verbreiterung ist, setzt der Kollaps mit steigender inhomogener Verbreiterung umso eher ein.

Wird die Zeitentwicklung der Inversion in der DMN (gepunktete Kurven in Abb. 4.1) mit den exakten Ergebnissen (durchgezogene Kurven) verglichen, so ergibt sich in der Anfangsphase eine quantitative Übereinstimmung. Im Langzeitbereich laufen die exakten und die genäherten Kurven jedoch auseinander. Der Zeitbereich, für den die Resultate der DMN mit den exakten im Detail übereinstimmen, vergrößert sich mit der inhomogenen Verbreiterung  $\Gamma$ . Dies zeigt insbesondere, daß Korrelationseffekte zwischen unterschiedlichen BX umso unbedeutender werden, je größer die inhomogene Verbreiterung wird.

Obwohl die Details der Zeitentwicklung der Inversion für den Langzeitbereich nicht quantitativ in der DMN beschrieben werden, stimmen die Zeitmittelwerte der genäherten und exakten Inversion gut überein (siehe Tabelle 4.1). Die relative Abweichung liegt je nach inhomogener Verbreiterung in der Größenordnung  $10^{-2}$  bis  $10^{-3}$ .

In Tabelle 4.1 sind zusätzlich die zeitgemittelten Inversionen angegeben, die aus den Dichtematrixgleichungen mit anregungszahlerhaltender Entkopplung (4.19) folgen. Die Übereinstimmung der Zeitmittelwerte läßt sich durch Verwendung der anregungszahlerhaltenden Entkopplung weiter verbessern. Ebenfalls liefert die anregungszahlerhaltende Entkopplung bessere Ergebnisse bezüglich der Details der Zeitentwicklung, was jedoch in Abb. 4.1 aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt ist. Für die Verbesserung muß jedoch der Preis gezahlt werden, daß im Fall der anregungszahlerhaltenden Entkopplung  $N(N+2)$  gekoppelte Differentialgleichungen anstelle von  $3N$  Differentialgleichungen gelöst werden müssen.

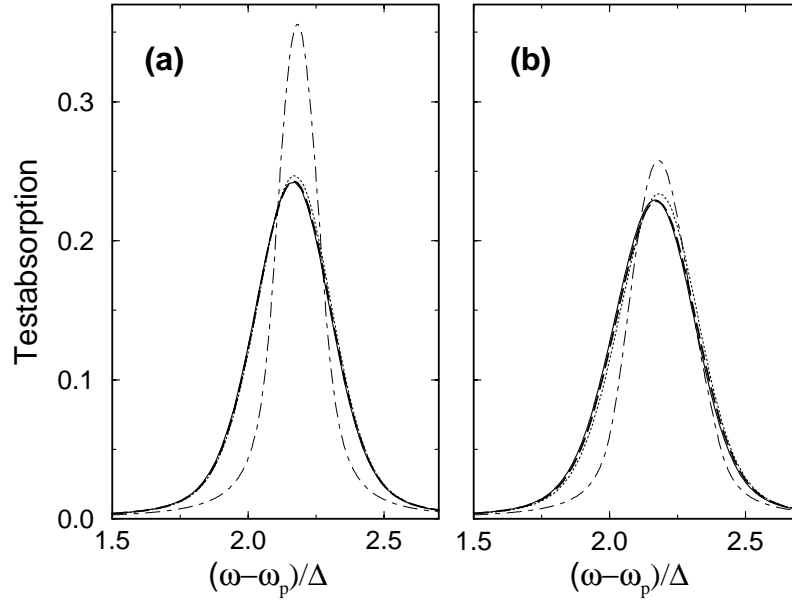


Abbildung 4.2: Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld für (a)  $\Gamma = 2g$ , (b)  $\Gamma = 3, 2g$ . Durchgezogene Kurve: exakt; gepunktete Kurve: DMN mit Standardentkopplung gemäß (3.11); gestrichelte Kurve: DMN mit anregungszahlerhaltender Entkopplung (4.19). Parameter:  $N = 5$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\Delta = 8g$ ,  $\gamma = 0, 4g$ . Die dünnen strichpunktiierten Kurven zeigen die semiklassischen Testabsorptionsspektren mit inhomogener Verbreiterung.

### Ergebnisse für die Testabsorption

In Abb. 4.2 ist der blauverschobene Teil (Bereich A) der Testabsorption in DMN mit den exakten Ergebnissen für zwei unterschiedliche inhomogene Verbreiterungen verglichen. Das Pumpfeld ist in einem kohärenten Zustand und die mittlere Pumpverstimmung von der Größenordnung der Rabi-Frequenz. Neben der genäherten Testabsorption, die aus der Standardentkopplung (3.11) folgt (gepunktete Kurven), sind auch die genäherten Ergebnisse für die anregungszahlerhaltende Entkopplung (4.19) gezeigt (gestrichelte Kurven). Während die Standardentkopplung (3.11) bereits gute Ergebnisse für die Testabsorption liefert, führt die anregungszahlerhaltende Entkopplung wieder zu einer Verbesserung der Näherung.

Zum Vergleich sind in Abb. 4.2 zusätzlich die semiklassischen Testabsorptionsspektren mit inhomogener Verbreiterung eingezeichnet (dünne strichpunktiierte Kurven). Die Abweichung zwischen der klassischen und quantisierten Behandlung des Pumpfeldes wird umso größer, je kleiner die inhomogene Verbreiterung  $\Gamma$  ist.

Die Verbesserung, die die anregungszahlerhaltende Entkopplung gegenüber der Standardentkopplung bietet, wird für kleine Pumpverstimnungen noch of-



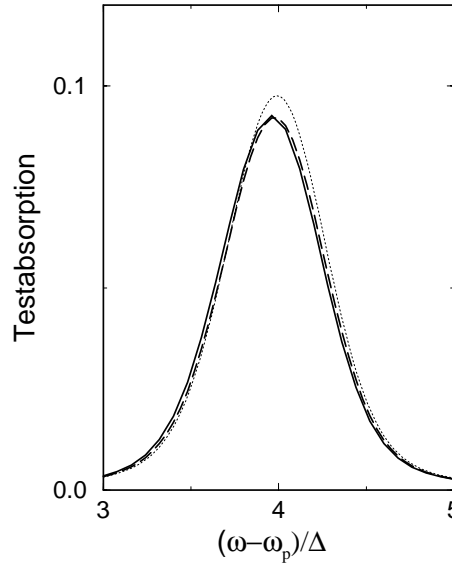


Abbildung 4.3: Testabsorption für ein kohärentes Pumpfeld mit inhomogener Verbreiterung  $\Gamma = 2g$ . Durchgezogene Kurve: exakt; gepunktete Kurve: DMN mit Standardentkopplung (3.11); gestrichelte Kurve: DMN mit anregungszahlerhaltender Entkopplung (4.19). Parameter:  $N = 5$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\Delta = 4g$ ,  $\gamma = 0,4g$ .

fenkundiger. Dazu ist in Abb. 4.3 der Vergleich der genäherten Testabsorption für beide Entkopplungen mit der exakten Testabsorption für eine kleinere mittlere Pumpverstimung als in Abb. 4.2 gezeigt. Die Standardentkopplung führt hier zu einer signifikanten Abweichung in der Höhe der Testabsorption, während die anregungszahlerhaltende Entkopplung sehr gute Ergebnisse liefert.

Als nächstes soll die Frage untersucht werden, inwieweit trotz inhomogener Verbreiterung der Einfluß der gequetschten Photonenstatistik auf die Linienform noch sichtbar bleibt. Dazu sind für gequetschte Pumpfelder in Abb. 4.4 die blauverschobenen Resonanzen in der Testabsorption für zwei unterschiedlich große inhomogene Verbreiterungen  $\Gamma$  verglichen. Das Pumpfeld wurde jeweils in einem kohärenten (durchgezogene Kurven), einem phasengequetschten (gestrichelte Kurven) und in einem amplitudengequetschten Zustand (gepunktete Kurven) angenommen. Berechnet wurden die gezeigten Spektren in Dichtematrixnäherung mit Standardentkopplung (3.11).

Während sich bei kleiner inhomogener Verbreiterung die unterschiedlich gequetschten Pumpfelder deutlich in den Linienformen der verschobenen Resonanzen widerspiegeln (Abb. 4.4.a), wird bei größerer inhomogener Verbreiterung (Abb. 4.4.b) der Einfluß der Photonenstatistik auf die Linienform kleiner. Insbesondere ist bei größerer inhomogener Verbreiterung (Abb. 4.4.b) nur noch ein geringer Unterschied in den Linienformen für das kohärente und das amplitudengequetschte Pumpfeld auszumachen, während sich die Linienform für das phasengequetschte Pumpfeld deutlich absetzt. Allerdings wird die leichte Asymmetrie

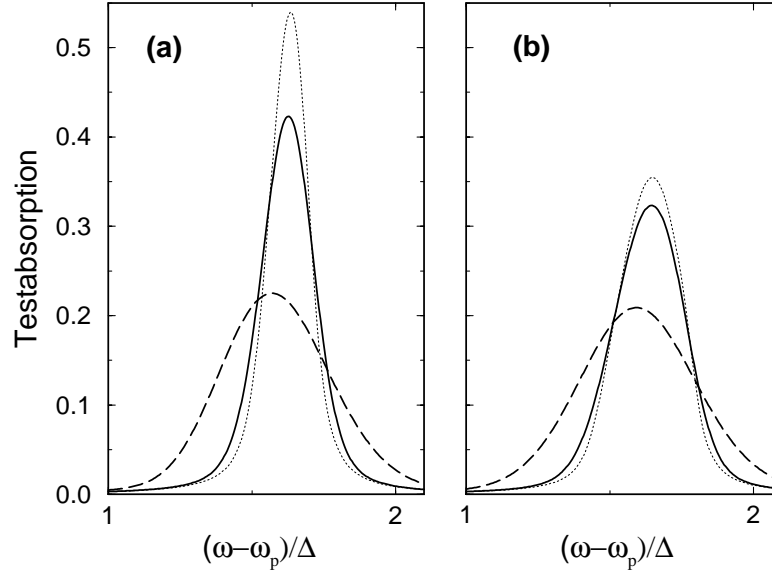


Abbildung 4.4: Testabsorption für unterschiedlich gequetschte Pumpfelder für (a)  $\Gamma = 2g$ , (b)  $\Gamma = 4g$ . Durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ ; gepunktete Kurve:  $\xi = 1$ ; gestrichelte Kurve:  $\xi = -1$ . Parameter:  $N = 10$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\Delta = 12g$ ,  $\gamma = 0,4g$ .

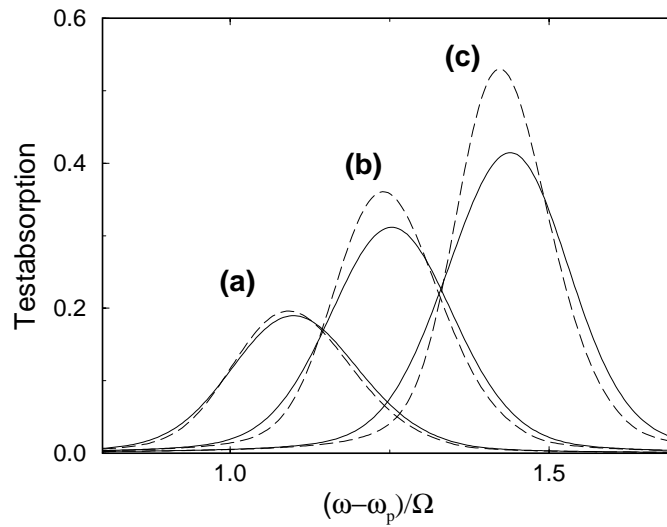


Abbildung 4.5: Testabsorption mit inhomogener Verbreiterung  $\Gamma = 3g$  für unterschiedliche Pumpverstimungen und für die in Abb. 4.6 gezeigte phasengequetschte Pumpphotonenstatistik: (a)  $\Delta = 8g$ , (b)  $\Delta = 12g$ , (c)  $\Delta = 16g$ . Die gestrichelten Kurven zeigen zum Vergleich die Spektren ohne inhomogene Verbreiterung. Parameter:  $N = 10$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\xi = 0,7i$ ,  $\gamma = 0,4g$ .

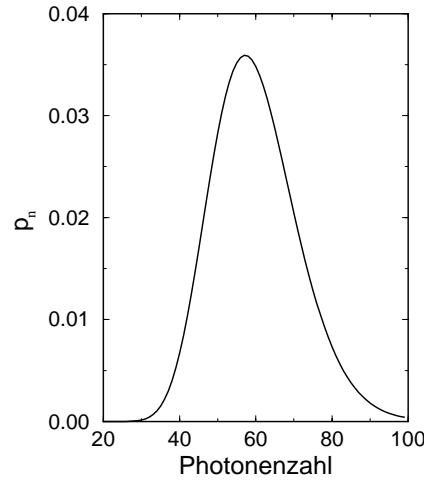


Abbildung 4.6: Photonenstatistik eines phasengequetschten Zustands der mittleren Photonenzahl  $\langle n \rangle = 60$  und dem Quetschparameter  $\xi = 0,7i$ .

in der Linienform für das phasengequetschte Pumpfeld durch die inhomogene Verbreiterung verwischt.

Als nächster Punkt soll diskutiert werden, daß für eine inhomogen verbreiterte Resonanz der Einfluß der Pumpphotonenstatistik auf die Linienform entscheidend von der Pumpverstimmung abhängt. In Abb. 4.5 sind die blauverschobenen Resonanzen in der Testabsorption für unterschiedliche Pumpverstimnungen verglichen. Das Pumpfeld wurde in einem phasengequetschten Zustand angenommen, der eine ausgeprägte Asymmetrie der Photonenstatistik aufweist, wie es in Abb. 4.6 zu sehen ist. In Abb. 4.5 sind neben den verschobenen Resonanzen mit inhomogener Verbreiterung (durchgezogene Kurven) auch die entsprechenden Resonanzen ohne inhomogene Verbreiterung gezeigt (gestrichelte Kurven). Bei großer Pumpverstimmung wird die Linienform durch die inhomogene Verbreiterung stark verändert (Kurve (c) in Abb. 4.6). Insbesondere ist eine durch die phasengequetschte Photonenstatistik aufgeprägte Asymmetrie in der Linienform nicht erkennbar. Erst bei kleinen Pumpverstimnungen wird die Linienform trotz der inhomogenen Verbreiterung leicht asymmetrisch. Der zusätzliche Einfluß der inhomogenen Verbreiterung auf die Linienform wird bei kleineren Pumpverstimnungen zunehmend geringer, wie der Vergleich der gestrichelten und durchgezogenen Kurven zeigt.

Die inhomogene Verbreiterung beeinflußt auch die in Abschnitt 2.3.4 diskutierte nichtklassische Verstärkung. Dazu ist in Abb. 4.7 die Testabsorption im Bereich der nichtklassischen Verstärkung für unterschiedliche inhomogene Verbreiterungen gezeigt. Die Spektren wurden hier exakt mit Hilfe der ‘Dressed States’ bestimmt. Der Effekt der nichtklassischen Verstärkung wird mit wachsender inhomogener Verbreiterung immer schwächer. Der Grund ist, daß kollektive Effekte,

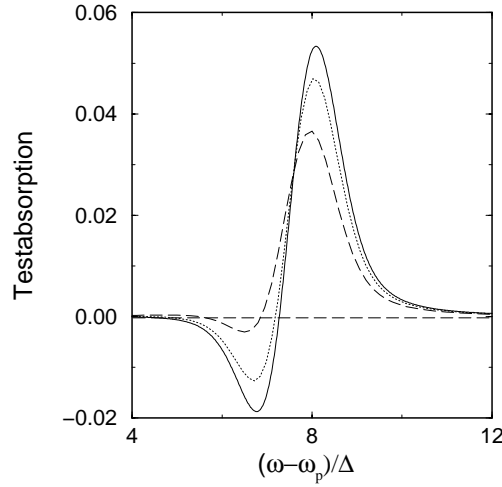


Abbildung 4.7: Einfluß der inhomogenen Verbreiterung auf die nichtklassische Verstärkung. Durchgezogene Kurve:  $\Gamma = 0$ ; gepunktete Kurve:  $\Gamma = 0, 4g$ ; gestrichelte Kurve:  $\Gamma = 0, 8g$ . Parameter:  $N = 7$ ,  $\Delta = 2g$ ,  $\xi = 0$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0, 8g$ .

welche die nichtklassische Verstärkung entscheidend beeinflussen, mit wachsender inhomogener Verbreiterung eine immer geringere Bedeutung bekommen. Bei inhomogenen Verbreiterungen  $\Gamma$ , die die Kopplungskonstante  $g$  wesentlich überschreiten, würde die nichtklassische Verstärkung verschwinden.

In den bisherigen Modellrechnungen zum Einfluß der inhomogenen Verbreiterung auf den optischen Stark-Effekt wurden moderate Zahlen von Störstellen und Pumpphotonen angenommen. In einem realistischen Pump-Test-Experiment an BX wird eine höhere Zahl von Störstellen und Pumpphotonen erwartet. Auch zeigen Abschätzungen, daß die inhomogene Verbreiterung  $\Gamma$  die Kopplungskonstante  $g$  um mindestens eine Größenordnung überschreiten wird. Es ist dann nach obigen Rechnungen nicht mehr zu erwarten, daß sich die Linienformen im optischen Stark-Effekt für ein kohärentes und ein amplitudengequetschtes Pumpfeld unterscheiden. Jedoch spiegelt sich der Einfluß eines phasengequetschten Pumpfeldes weiterhin in der Linienform wider. Um dies zu illustrieren, ist in Abb. 4.8 die Testabsorption für 50 Störstellen und für unterschiedlich stark phasengequetschte Pumpfelder der mittleren Photonenzahl  $\langle n \rangle = 500$  berechnet worden. Die Photonenzustandstatistik der phasengequetschten Zustände ist in Abb. 4.9 gezeigt. Bei der Berechnungen der Spektren in Abb. 4.8 wurde die Standardentkopplung (3.11) benutzt.

Bei gequetschten Phasenfluktuationen des Pumpfeldes zeigt sich eine deutliche Verbreiterung der verschobenen Resonanz, obwohl die inhomogene Verbreiterung  $\Gamma$  fast zehnmal so groß wie die Kopplungskonstante  $g$  ist. Folglich kann sich in einem realistischen Experiment an BX der Einfluß eines phasengequetschten Pumpfeldes im optischen Stark-Effekt durchaus bemerkbar machen.

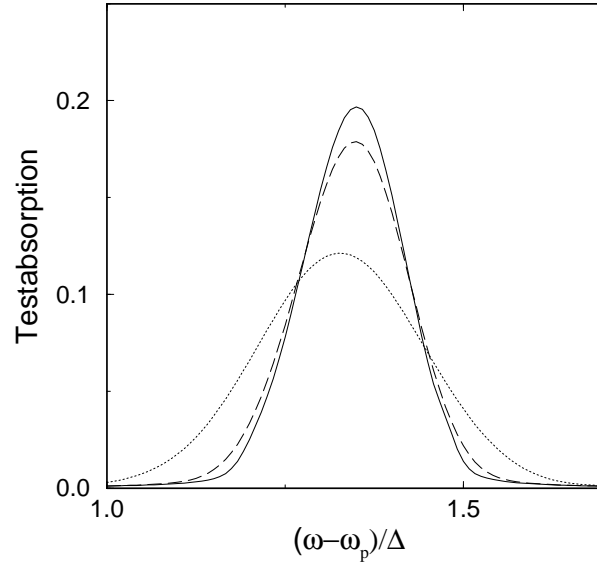


Abbildung 4.8: Testabsorption für unterschiedlich stark phasengequetschte Pumpfelder für BX mit einer inhomogenen Verbreiterung von  $\Gamma = 8,75g$ . Durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ , gestrichelte Kurve:  $\xi = 1$ , gepunktete Kurve:  $\xi = 2$ .  $N = 50$ ,  $\langle n \rangle = 500$ ,  $\Delta = 50g$ ,  $\gamma = 0,5g$ .

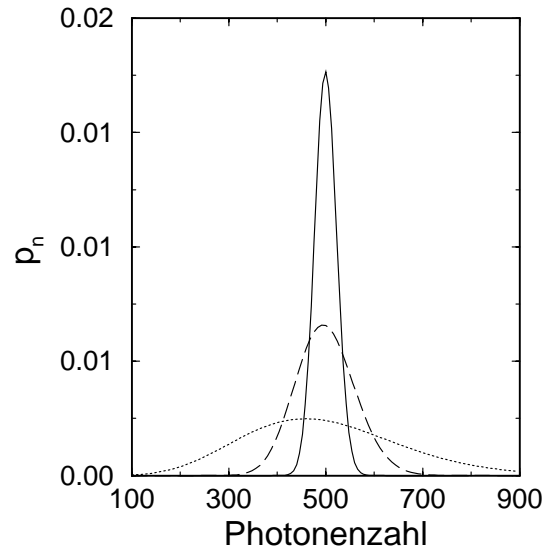


Abbildung 4.9: Photonenstatistik der in Abb. 4.8 angenommenen Pumpfelder. Durchgezogene Kurve:  $\xi = 0$ , gestrichelte Kurve:  $\xi = 1$ , gepunktete Kurve:  $\xi = 2$ .

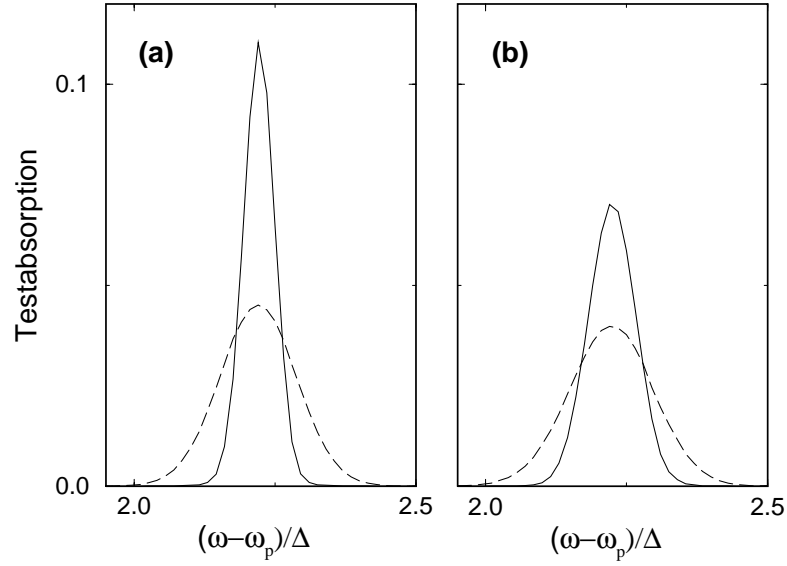


Abbildung 4.10: Testabsorption für 500 Störstellen. Das Pumpfeld ist in phasengequetschten Zuständen mit  $\langle n \rangle = 10^4$ , deren jeweilige Photonenstatistik in Abb. 4.11 gezeigt ist. Inhomogene Verbreiterungen: (a)  $\Gamma = 5g$ , (b)  $\Gamma = 15g$ . Weitere Parameter:  $\Delta = 100g$ ,  $\gamma = 0,12g$ .

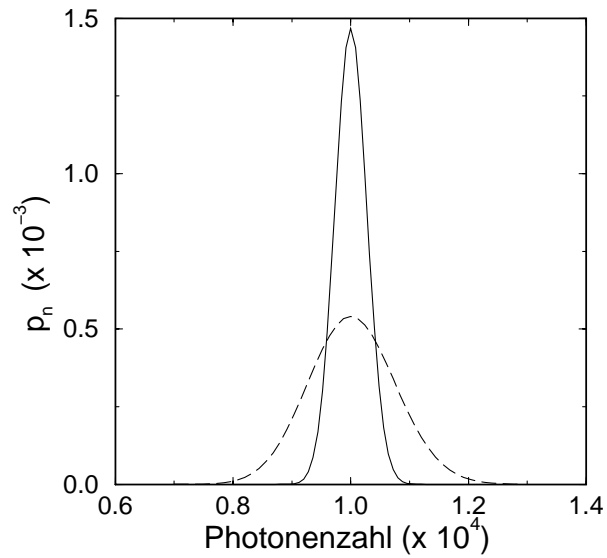


Abbildung 4.11: Photonenstatistik der in Abb. 4.10 angenommenen Pumpfelder.

Zum Abschluß soll bemerkt werden, daß die Dichtematrixgleichungen die Berechnung der Testabsorption für bis zu 1000 Störstellen ermöglichen. Das Ergebnis einer Rechnung für 500 Störstellen ist in Abb. 4.10 gezeigt. Abb. 4.11 zeigt die Photonenstatistik der entsprechenden phasengequetschten Pumpfelder. Es gibt keinen wesentlichen qualitativen Unterschied zu den bereits in Abb. 4.8 gezeigten Ergebnissen. Jedoch demonstriert diese Rechnung das Potential, das die hier vorgestellte Dichtematrixnäherung bietet, da für die exakte Berechnung eine Matrix der Dimension  $2^{1000}$  hätte diagonalisiert werden müssen, was praktisch unmöglich ist.

### 4.2.3 Zusammenfassung von Abschnitt 4.2

- Der optische Stark-Effekt mit quantisiertem Pumpfeld an störstellengebundenen Exzitonen läßt sich im Rahmen einer Dichtematrixnäherung beschreiben.
- Der Berechnungsaufwand für die Lösung der Dichtematrixgleichungen ist zwar nicht unabhängig von der Anzahl der betrachteten Störstellen, jedoch wesentlich geringer als für eine exakte Bestimmung der 'Dressed States'. Es lassen sich bis zu 1000 Störstellen im Rahmen der vorgestellten Dichtematrixtheorie behandeln.
- Die DMN mit Standardentkopplung liefert gute Ergebnisse für Pumpverstimmungen in der Größenordnung der mittleren Rabi-Frequenz. Die anregungszahlerhaltende Entkopplung führt zwar zu verbesserten Ergebnissen, aber auch zu einer größeren Zahl von gekoppelten Differentialgleichungen.
- Das phasengequetschte Pumpfeld macht sich in der Linienform im optischen Stark-Effekt auch dann bemerkbar, wenn die inhomogene Verbreiterung  $\Gamma$  die Kopplungskonstante  $g$  um eine Größenordnung überschreitet.
- Bei kleinen Pumpverstimmungen wird die Linienform im optischen Stark-Effekt an BX besonders stark von der Photonenstatistik des Pumpfeldes beeinflusst.
- Der Effekt der nichtklassischen Verstärkung verschwindet bei inhomogenen Verbreiterungen  $\Gamma$ , die die Kopplungskonstante  $g$  wesentlich überschreiten. Der Nachweis der nichtklassischen Verstärkung an BX ist deshalb nicht zu erwarten.

### 4.3 Das gepulste Pump-Test-Experiment an störsstelle gebundenen Exzitonen

In der bisherigen Diskussion des optischen Stark-Effekts wurden sowohl für das Pumpfeld als auch für das Testfeld stationäre Lichtfelder angenommen. In der Regel werden Experimente zur Untersuchung nichtlinearer optischer Effekte in Halbleitern mit Laserpulsen durchgeführt. Ein Grund hierfür ist, daß nichtlineare Effekte bei den mit Hilfe von Pulsen erzeugten starken Intensitäten besonders deutlich hervortreten. Ein weiterer Aspekt ist, daß sich eine Dynamik auf sehr kurzen Zeitskalen von ps oder fs mit Hilfe von Pulsen untersuchen läßt. Für den optischen Stark-Effekt spielt dieser zweite Aspekt jedoch keine Rolle, da es sich nicht um einen Kurzzeiteffekt handelt.

In diesem Abschnitt wird ein gepulstes Pump-Test-Experiment zum optischen Stark-Effekt an störsstelle gebundenen Exzitonen (BX) theoretisch untersucht, wobei das Pumpfeld weiterhin quantisiert behandelt wird. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Zusatzeffekte gelegt, die in einem gepulsten Experiment gegenüber einem Experiment mit stationären Lichtfeldern zu erwarten sind.

Desweiteren ist in der bisherigen Diskussion stets davon ausgegangen worden, daß die Wechselwirkung zwischen den BX und dem Pumpfeld sehr schnell (nichtadiabatisch) einsetzt. Eine solche Annahme ist jedoch nur dann gerechtfertigt, wenn die Zeitskala für das Einsetzen der Wechselwirkung die inverse mittlere Rabinofrequenz wesentlich unterschreitet. Im Rahmen der gepulsten Beschreibung des Pump-Test-Experiments läßt sich analysieren, inwieweit eine endliche Einschaltzeit der Wechselwirkung die bisherigen Ergebnisse modifiziert.

#### 4.3.1 Theoretische Beschreibung des gepulsten Pump-Test-Experiments

Ein Laserpuls läßt sich im Rahmen einer klassischen Beschreibung des Strahlungsfeldes mit Hilfe einer zeitabhängigen (komplexen) Feldamplitude charakterisieren, welche die Einhüllende des Pulses beschreibt.

Wird das Strahlungsfeld quantisiert behandelt, so wird der Puls als Produktzustand vieler (quantisierter) Moden dargestellt. Werden als Moden ebene Wellen angenommen, die durch den Wellenvektor  $q$  charakterisiert werden, so wird der Dichteoperator des Strahlungsfeldes gegeben durch:

$$\rho^{(f)} = \prod_q \rho_q. \quad (4.29)$$

Dabei definiert die Dichtematrix  $\rho_q$  den Zustand der Mode  $q$ . Der Index  $q$  läuft über alle Moden, die für die Beschreibung des Pulses relevant sind.

Befinden sich beispielweise alle Moden in einem kohärenten Zustand, d. h.

$$\rho_q = |\alpha_q\rangle\langle\alpha_q| \text{ mit } a_q |\alpha_q\rangle = \alpha_q |\alpha_q\rangle, \quad (4.30)$$



so wird der Erwartungswert der Feldamplitude  $\mathcal{E} = \sum_q a_q$  im Falle eines freien Strahlungsfeldes gegeben durch

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \sum_q \alpha_q e^{-i\omega_q t} = \beta(t) e^{-i\omega_{q_0} t}. \quad (4.31)$$

Dabei ist  $\omega_{q_0}$  die Mittenfrequenz des Pulses und  $\beta(t)$  die (komplexe) Feldamplitude, die die Einhüllende des Pulses beschreibt.

Nach diesen Ausführungen für die quantisierte Beschreibung eines freien Pulses soll nun die Wechselwirkung zwischen den BX und dem Puls betrachtet werden, die mit dem Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \hbar \sum_q \omega_q a_q^\dagger a_q + \hbar \omega_{q_0} J_3 + \\ & + \hbar \sum_\nu \Delta_\nu J_{\nu,3} + \hbar \sum_q g_q (a_q J_+ + a_q^\dagger J_-). \end{aligned} \quad (4.32)$$

beschrieben wird. Dabei ist  $\omega_{q_0}$  die Mittenfrequenz des Pulses.  $\Delta_\nu$  bezeichnet die Verstimmung der Mittenfrequenz  $\omega_{q_0}$  gegenüber der BX-Resonanz bezogen auf die Störstelle  $\nu$ . Die  $q$ -Summen laufen über alle für den Pumpuls relevanten Moden.

Die Wechselwirkung mit dem klassisch behandelten Testfeld wird durch den Operator  $\mathcal{V}(t)$  beschrieben:

$$\mathcal{V}(t) = \hbar \tilde{g}(A(t) e^{-i\omega t} J_+ + h.c.). \quad (4.33)$$

Die Berechnung des Testabsorptionsspektrums mit Hilfe des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}_0$  in (4.32) stellt ein außerordentlich aufwendiges Problem dar. Zum einen tritt eine große Zahl von Freiheitsgraden auf. Zum anderen müßten zusätzliche Entkopplungen höherer Korrelationen von Photonenoperatoren getestet werden. Anstelle der Beschreibung des gepulsten Pump-Test-Experiments mit Hilfe des Hamiltonoperators (4.32), soll der Pumpuls nur mit Hilfe einer effektiven zeitabhängigen Kopplung  $g(t)$  an eine einzelne Mode der Mittenfrequenz  $\omega_{q_0}$  beschrieben werden, wobei  $g(t)$  die Einhüllende des Pumpulses beschreibt. Der entsprechende Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$  lautet

$$\mathcal{H}_0(t) = \hbar \omega_{q_0} \mathcal{K} + \hbar \sum_{\nu=1}^N \Delta_\nu J_{\nu,3} + \hbar (g(t) a_{q_0} J_+ + g^*(t) a_{q_0}^\dagger J_-). \quad (4.34)$$

Daß dieser Hamiltonoperator tatsächlich die Wechselwirkung der BX mit dem Pumpuls effektiv beschreibt, kann unter folgenden Annahmen plausibel gemacht werden:

- Der Pumpuls wird als spektral scharf und räumlich gerichtet angenommen. Damit sind die Wellenvektoren  $q$  der Moden, aus denen sich der Pumpuls zusammensetzt, in einem sehr engen Bereich um  $q_0$  konzentriert.

- Die Grundmoden, welche den Pumpimpuls bilden, befinden sich in einem gequetschten Zustand, der nur wenig vom kohärenten Zustand abweicht. Es gilt also:

$$\rho^{(f)} = \prod_q |\phi_q\rangle\langle\phi_q| \text{ mit } a_q |\phi_q\rangle \simeq \alpha_q |\phi_q\rangle. \quad (4.35)$$

- Da eine mittlere Pumpverstimmung angenommen wird, die mindestens von der Größenordnung der Rabifrequenz ist, und die mittlere Zahl der Pump-Photonen die Zahl der relevanten Störstellen wesentlich überschreitet soll, wird das Pumpfeld nur sehr wenig durch die Wechselwirkung mit den BX modifiziert.

Als Folge der ersten Annahme wird die  $q$ -Abhängigkeit von  $g_q$  vernachlässigt und sämtliche Kopplungskonstanten in (4.32) durch  $g_{q_0}$  ersetzt.

Weiter besteht zwischen den Erwartungswerten  $\langle \mathcal{O}(t)a_q(t) \rangle$  und  $\langle \mathcal{O}(t)a_{q_0}(t) \rangle$  folgender näherungsweiser Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t)a_q(t) \rangle &\simeq \beta_q e^{-i(\omega_q - \omega_{q_0})t} \langle \mathcal{O}(t)a_{q_0}(t) \rangle \\ \text{mit } \beta_q &\equiv \frac{\alpha_q}{\alpha_{q_0}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Hier ist  $\mathcal{O}$  ein Operator, der sich aus  $J$ -Operatoren,  $a_{q_0}^\dagger$  und  $a_{q_0}$  zusammensetzt. Bei dieser Näherung wurde ausgenutzt, daß das Pumpfeld kaum von der Wechselwirkung mit den BX gestört wird und sich das Pumpfeld in einem Zustand befindet, der nicht wesentlich vom kohärenten Zustand abweicht.

Falls  $[\mathcal{O}, a_{q_0}] = 0$  gilt, so folgt mit analoger Begründung

$$\langle a_q(t)\mathcal{O}(t) \rangle \simeq \beta_q e^{-i(\omega_q - \omega_{q_0})t} \langle a_{q_0}(t)\mathcal{O}(t) \rangle. \quad (4.37)$$

Wird beachtet, daß die mittlere Photonenzahl  $\langle n \rangle$  in der Mode  $q_0$  groß gegen Eins ist und der Betrag des Erwartungswertes  $\langle \mathcal{O}a_{q_0} \rangle$  ungefähr um einen Faktor  $\langle n \rangle$  größer ist als der des Erwartungswertes  $\langle [\mathcal{O}, a_{q_0}] \rangle$ , falls  $\langle a_{q_0}\mathcal{O} \rangle \neq 0$  gilt, so folgt (4.37) auch näherungsweise für den Fall, daß  $[\mathcal{O}, a_{q_0}] \neq 0$  ist.

Unter Ausnutzung der Näherungen (4.36) und (4.37) läßt sich die Bewegungsgleichung von  $\langle \mathcal{O}(t) \rangle$  schreiben als:

$$\partial_t \langle \mathcal{O}(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{H}_0(t) + \mathcal{V}(t), \mathcal{O}(t)] \rangle, \quad (4.38)$$

wobei der Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0(t)$  durch (4.34) gegeben ist. Die effektive zeitabhängige Kopplungskonstante  $g(t)$  an das Pumpfeld wird bestimmt durch

$$g(t) = g_{q_0} \sum_q \beta_q e^{-i(\omega_q - \omega_{q_0})t} \quad (4.39)$$

und gibt die Einhüllende des Pumppulses wieder. Der Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  ist wie bisher gegeben als

$$\mathcal{K} = a_{q_0}^\dagger a_{q_0} + J_3 + \frac{N}{2}. \quad (4.40)$$

Die Wechselwirkung der BX mit dem Pumpuls läßt sich folglich mit Hilfe des bisherigen Hamiltonoperators  $\mathcal{H}_0$  in (4.1) beschreiben in den eine effektive zeitabhängige Kopplung  $g(t)$  eingefügt wird. Damit lassen sich die bisherigen Dichtematrixgleichungen verwenden, wobei die Kopplungskonstante  $g$  und die Testfeldamplitude  $A$  hier durch die zeitabhängigen Größen  $g(t)$  und  $A(t)$  ersetzt werden. Letztere bestimmen die Einhüllenden von Pump- und Testpuls.

Die lineare Testabsorption kann mit den Ergebnissen der Dichtematrixgleichungen berechnet werden durch

$$\mathcal{A}_\omega \propto -\frac{\text{Im} \left( \int dt \langle J_-^{(1)}(t) \rangle A^*(t) e^{i\omega t} \right)}{\int dt |A(t)|^2}, \quad (4.41)$$

wobei  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle$  wiederum den linearen Anteil im Testfeld von  $\langle J_-(t) \rangle$  bezeichnet.

### 4.3.2 Ergebnisse für das gepulste Pump-Test-Experiment

#### Einfluß des Einschaltvorgangs der Wechselwirkung

Bevor die Ergebnisse für das gepulste Pump-Test-Experiment vorgestellt werden, soll zunächst der Einfluß einer langsam eingeschalteten Wechselwirkung zwischen den BX und dem Pumpfeld auf die Testabsorption untersucht werden. Um den Effekt der Einschaltzeit besonders klar herauszupräparieren, wird hier die inhomogene Verbreiterung der BX nicht berücksichtigt. Diese wird jedoch bei den späteren Berechnungen zum gepulsten Pump-Test-Experiment wieder einbezogen.

In der vorangegangenen Diskussion des optischen Stark-Effekts ist stets angenommen worden, daß die Wechselwirkung zwischen den BX und dem Pumpfeld auf einer Zeitskala  $\tau_p$  einsetzt, für die  $\tau_p \cdot \Omega$  wesentlich kleiner als Eins ist.  $\Omega$  ist dabei die (mittlere) Rabi-Frequenz bei voll eingeschalteter Wechselwirkung. Hier soll nun der optische Stark-Effekt für größere Einschaltzeiten  $\tau_p$  untersucht werden. Um den Einschaltvorgang der Wechselwirkung zu beschreiben, wird eine zeitabhängige Kopplung  $g(t)$  in der Form des Fehlerintegrals

$$g(t) = \frac{g_0}{\pi} \int_{-\infty}^{(t-t_0)/\tau_p} dt' e^{-t'^2} \quad (4.42)$$

betrachtet. Durch den Parameter  $t_0$  kann der Startzeitpunkt des Einschaltvorgangs variiert werden.  $g_0$  ist die Kopplung nach vollem Eintreten der Wechselwirkung. Für  $\tau_p \rightarrow 0$  konvergiert  $g(t)$  gegen eine Stufenfunktion  $g(t) \rightarrow g_0 \theta(t - t_0)$  für schlagartiges Einschalten.

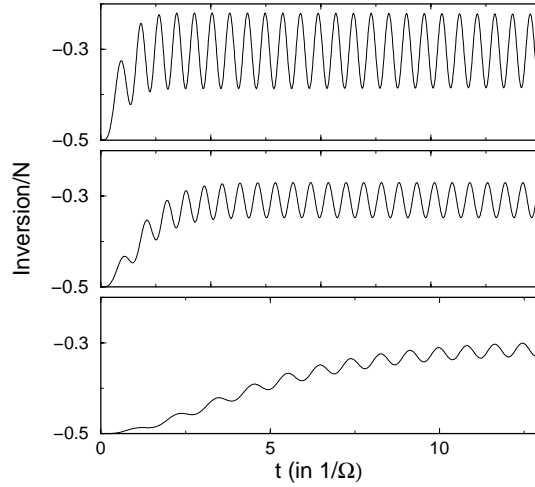


Abbildung 4.12: Zeitentwicklung der Inversion für unterschiedliche Einschaltzeiten  $\tau_p$  der Wechselwirkung zwischen Pumpfeld und BX. Das Pumpfeld ist im Fockzustand mit 60 Photonen. Oberes Bild:  $\tau_p \cdot \Omega = 1,6$ ; mittleres Bild:  $\tau_p \cdot \Omega = 3,2$ ; unteres Bild:  $\tau_p \cdot \Omega = 7,8$ . Parameter:  $N = 5$ ,  $\Delta = 12g$ .

Zunächst soll der Einfluß des Einschaltvorgangs auf die Inversion in nullter Ordnung im Testfeld diskutiert werden. In Abb. 4.12 ist die Zeitentwicklung der Inversion für unterschiedliche Einschaltzeiten  $\tau_p$  gezeigt, wobei ein Pumpfeld im Fockzustand angenommen wurde. Zu Beginn der Zeitentwicklung sollen keine BX angeregt sein. Die hier gezeigten Ergebnisse beruhen auf einer exakten Rechnung, bei der der Anfangszustand mit dem Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0(t)$  in (4.34) propagiert wurde. Die inhomogene Verbreiterung wurde, wie bereits oben erwähnt, Null gesetzt.

Ist  $\tau_p \cdot \Omega$  in der Größenordnung von Eins, so treten deutliche Rabioszillation der Inversion auf (oberes Teilbild in Abb. 4.12). Im Gegensatz zu dem in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Fall, daß  $\tau_p \cdot \Omega$  wesentlich kleiner als Eins ist, schwingen die Rabioszillationen nicht mehr bis zum minimalen Wert von  $\langle J_3 \rangle / N = -1/2$  durch. Bei wachsender Einschaltzeit  $\tau_p$  wird die Amplitude der Rabioszillationen immer kleiner, bis schließlich die Inversion fast adiabatisch der langsam eingeschalteten Wechselwirkung folgt.

Die Einschaltzeit  $\tau_p$  wirkt sich ebenfalls auf die Testabsorption im optischen Stark-Effekt aus. Dazu ist in Abb. 4.13 der blauverschobene Bereich der Testabsorption für (a) ein kohärentes und (b) ein amplitudengequetschtes Pumpfeld für unterschiedliche Einschaltzeiten  $\tau_p$  gezeigt. Die Einschaltzeit  $\tau_p$  beeinflusst die Höhe der Testabsorption. Diese nimmt mit wachsender Einschaltzeit zunächst zu, bis sie schließlich für Einschaltzeiten mit  $\tau_p \cdot \Omega > 1$  fast schon die Höhe des asymptotischen Grenzfalles  $\tau_p \rightarrow \infty$  erreicht hat. Der intermediäre Bereich, in dem sich die Höhe der Testabsorption mit der Einschaltzeit stark ändert, ist durch

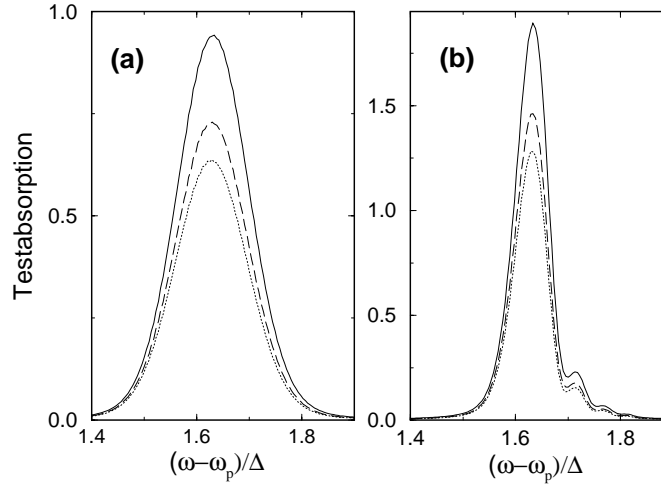


Abbildung 4.13: Testabsorption für unterschiedliche Einschaltzeiten des Pumpfeldes für (a) ein kohärentes ( $\xi = 0$ ) und (b) ein amplitudengequetschtes ( $\xi = 1, 2$ ) Pumpfeld. Durchgezogene Kurven:  $\tau_p \cdot \Omega = 1,6$ ; gestrichelte Kurven:  $\tau_p \cdot \Omega = 0,32$ ; gepunktete Kurven:  $\tau_p \cdot \Omega = 0,16$ . Parameter:  $N = 5$ ,  $\Delta = 16g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0,1g$ .

$0,1 < \tau_p \cdot \Omega < 1,0$  bestimmt.

Wichtig ist, daß die Linienformen in Abb. 4.13 unabhängig von der Einschaltzeit die Photonenstatistik des Pumpfeldes widerspiegeln. Dies wird besonders in den Testabsorptionsspektren für das amplitudengequetschte Pumpfeld in Abb. 4.13.b deutlich, in denen sich unabhängig von  $\tau_p$  die charakteristischen Satelliten der Photonenstatistik zeigen.

Hier sollte bemerkt werden, daß für das stark amplitudengequetschte Feld das hier verwendete Modell für den Pumpimpuls eventuell schon etwas überstrapaziert wird. Der gewählte Quetschparameter  $\xi$  ist hier bereits so groß, daß der Feldzustand aufgrund der kleinen mittleren Photonenzahl  $\langle n \rangle$  schon deutlich von einem kohärenten Zustand abweicht und somit die Annahme (4.35) nicht mehr erfüllt ist. Jedoch ist davon auszugehen, daß das Modell der zeitabhängigen Kopplung  $g(t)$  immerhin die richtige Tendenz für das amplitudengequetschte Feld angibt.

Die Einschaltzeit  $\tau_p$  beeinflußt ebenfalls die Unterstrukturen in der Testabsorption, die für  $N > 1$  bei großer spektraler Auflösung sichtbar werden (siehe dazu auch Abb. 2.11 aus Kapitel 2). In Abb. 4.14 ist die Testabsorption für  $N = 2$  und zwei unterschiedliche Einschaltzeiten gezeigt. Ein Symbol charakterisiert hier die Lage und Höhe einer Resonanz. Jedes der Spektren besteht jeweils aus zwei Untergruppen oder Zweigen von Resonanzen. Wird die Einschaltzeit erhöht, so wachsen die Resonanzen des oberen Zweiges an, während sich die des unteren Zweiges der Null nähern. Im adiabatischen Grenzfall  $\tau_p \rightarrow \infty$  verschwinden die Resonanzen des unteren Zweiges und damit auch die Unterstrukturen.

Die  $\tau_p$ -Abhängigkeit der Unterstrukturen kann mit Hilfe der ‘Dressed States’

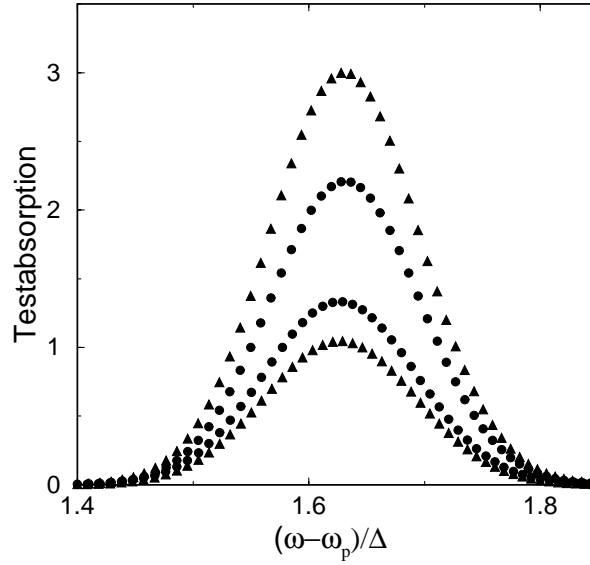


Abbildung 4.14: Testabsorption mit Unterstrukturen für  $N = 2$  und zwei unterschiedlichen Einschaltzeiten  $\tau_p$ . Kreise:  $\tau_p \cdot \Omega = 0,16$ ; Dreiecke:  $\tau_p \cdot \Omega = 0,31$ . Parameter:  $\Delta = 16g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\xi = 0$ .

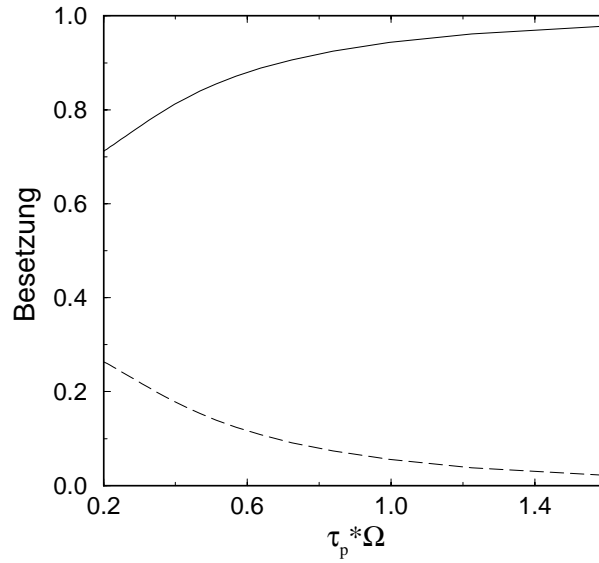


Abbildung 4.15: Besetzungen innerhalb eines Triplets (siehe dazu Abb. 2.12 in Kapitel 2) von ‘Dressed States’ für  $N = 2$  in Abhängigkeit von der Einschaltzeit  $\tau_p$ . Durchgezogene Kurve: Besetzung des unteren ‘Dressed State’; gestrichelte Kurve: Besetzung des mittleren ‘Dressed State’. Parameter:  $N = 2$ ,  $\Delta = 12g$ ,  $n = 60$ .

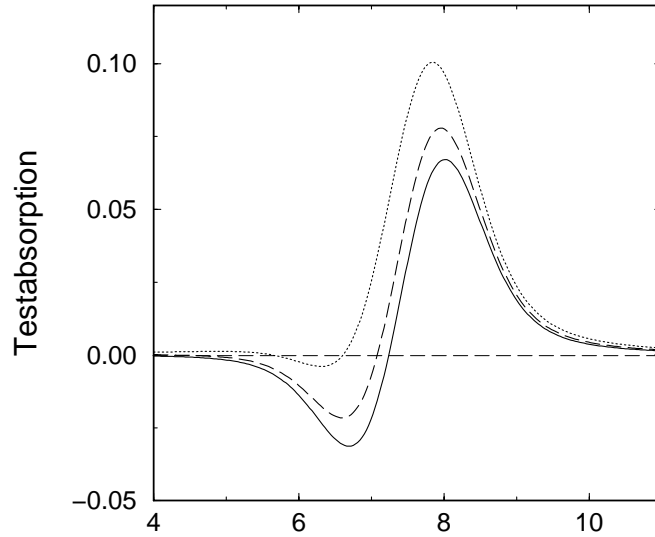


Abbildung 4.16: Testabsorption mit nichtklassischer Verstärkung für unterschiedliche Einschaltzeiten  $\tau_p$ . Durchgezogene Kurve:  $\tau_p \cdot \Omega = 0, 16$ ; gestrichelte Kurve:  $\tau_p \cdot \Omega = 0, 53$ ; gepunktete Kurve:  $\tau_p \cdot \Omega = 1, 6$ . Parameter:  $N = 10$ ,  $\Delta = 2g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\xi = 0$ ,  $\gamma = 0.8g$ .

interpretiert werden, wenn beachtet wird, daß sich die Besetzungsverteilung innerhalb eines Multipletts von ‘Dressed States’ mit  $\tau_p$  ändert. Für den Fall  $N = 2$  sind die ‘Dressed States’ in Triplets angeordnet (siehe dazu Abb. 2.12 in Kapitel 2). Ist  $\tau_p \cdot \Omega$  wesentlich kleiner als Eins, so werden neben dem unteren ‘Dressed State’ eines Triplets auch die energetisch höheren ‘Dressed States’ besetzt. Falls  $\tau_p \cdot \Omega$  den Wert Eins überschreitet, so ist im wesentlichen nur der untere ‘Dressed State’ eines Triplets besetzt. Dies ist in Abb. 4.15 illustriert, wo für den Fall  $N = 2$  die Besetzung des unteren und des mittleren ‘Dressed State’ nach dem Einschaltvorgang in Abhängigkeit von  $\tau_p \cdot \Omega$  gezeigt ist. Die Gesamtbesetzung des Triplets wurde auf Eins normiert.

Da nun eine Resonanz des oberen Zweiges der in Abb. 4.14 gezeigten Unterstrukturen einer Absorption entspricht, die vom unteren ‘Dressed State’ eines Triplets ausgeht, wachsen diese Resonanzen mit  $\tau_p$  an. Einer Resonanz auf dem unteren Zweig entspricht hingegen eine Absorption ausgehend vom mittleren ‘Dressed State’. Diese Absorption nähert sich dementsprechend mit wachsender Einschaltzeit  $\tau_p$  der Null.

Die Besetzungsverhältnisse innerhalb der Multipletts von ‘Dressed States’ erklären auch für den Fall, daß die Unterstrukturen nicht aufgelöst sind, warum die Testabsorption wie in Abb. 4.13 mit  $\tau_p$  ansteigt. Der Grund ist, daß im wesentlichen nur noch die jeweils unteren ‘Dressed States’ der Multipletts besetzt sind, wenn  $\tau_p \cdot \Omega$  den Wert Eins überschreitet.

Als nächster Punkt soll der Einfluß der Einschaltzeit auf die nichtklassische

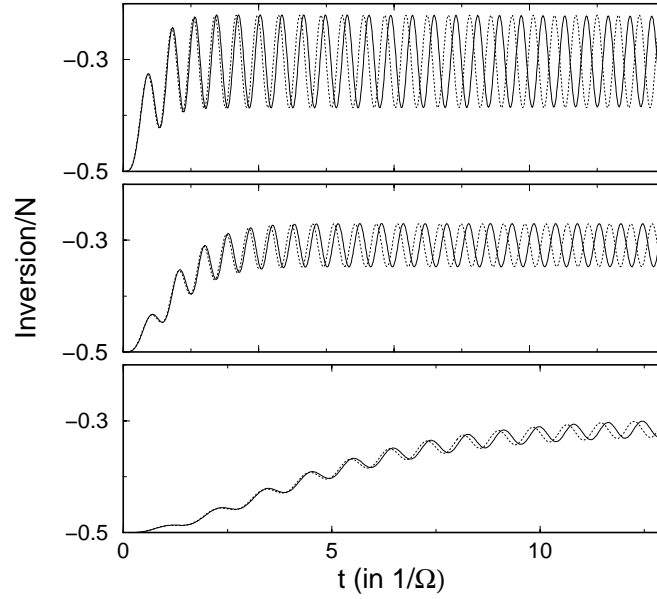


Abbildung 4.17: Vergleich der exakten (durchgezogene Kurven) und genäheren (gepunktete Kurven) Zeitentwicklung der Inversion für unterschiedliche Einschaltzeiten  $\tau_p$ . Das Pumpfeld ist im Fockzustand mit 60 Photonen. Oberes Bild:  $\tau_p \cdot \Omega = 1,6$ , mittleres Bild:  $\tau_p \cdot \Omega = 3,2$ , unteres Bild:  $\tau_p \cdot \Omega = 7,8$ .

Verstärkung diskutiert werden. Dazu ist in Abb. 4.16 die Testabsorption im Bereich der nichtklassischen Verstärkung für unterschiedliche Einschaltzeiten  $\tau_p$  gezeigt. Der Effekt der nichtklassischen Verstärkung wird mit wachsender Einschaltzeit immer kleiner. Überschreitet  $\tau_p \cdot \Omega$  den Wert Eins wesentlich, so verschwindet die nichtklassische Verstärkung gänzlich. Im Zusammenhang mit der vorangegangenen Diskussion über die Besetzungen der ‘Dressed States’ bei unterschiedlichen Einschaltzeiten zeigt dies, daß für den Effekt der nichtklassischen Verstärkung Besetzungen von energetisch höheren ‘Dressed States’ innerhalb der Multipletts wesentlich sind.

### Ergebnisse der Dichtematrixnäherung für eine langsam eingeschaltete Wechselwirkung

Im letzten Teil wurde die Auswirkung einer endlichen Einschaltzeit der Wechselwirkung auf die Testabsorption diskutiert. Für die Berechnung der hier gezeigten Ergebnisse wurde so verfahren, daß die Zeitentwicklung des Zustands bezüglich des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}_0(t)$  in (4.34) numerisch bestimmt wurde. Für  $N$  Störstellen zerfällt der Hamiltonoperator in Untermatrizen der maximalen Dimension  $2N + 1$ , wenn von der inhomogenen Verbreiterung der BX abgesehen wird. Deshalb ist die Zustandspropagation und die damit verbundene exakte Bestimmung der Testabsorption nur für moderate Zahlen von Störstellen möglich.



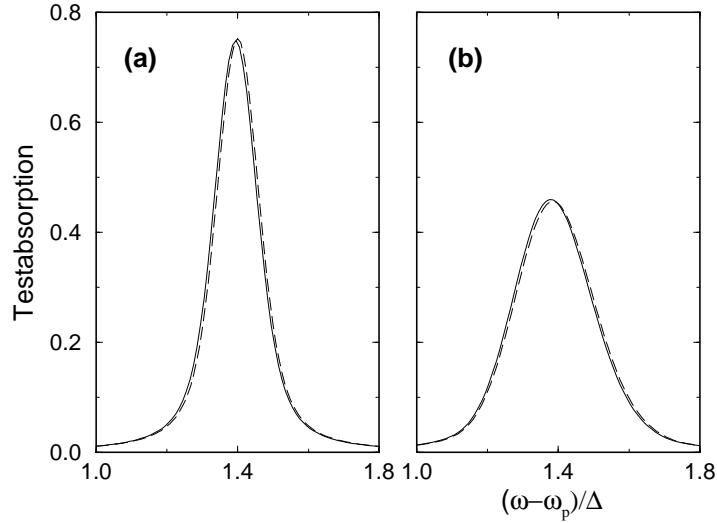


Abbildung 4.18: Exakte (durchgezogene Kurven) und genäherte (gestrichelte Kurven) Testabsorption für eine langsam eingeschaltete Wechselwirkung ( $\tau_p \cdot \Omega = 1, 6$ ). Das Pumpfeld ist (a) in einem kohärenten ( $\xi = 0$ ) und (b) in einem phasengequetschten Zustand ( $\xi = -0, 8$ ). Parameter:  $N = 5$ ,  $\Delta = 16g$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\gamma = 0, 6g$ .

Für größere Zahlen von Störstellen sind die Dichtematrixgleichungen mit der näherungsweisen Entkopplung von Paarkorrelationen zu verwenden.

In diesem Teil soll gezeigt werden, daß die Dichtematrixgleichungen auch dann eine adäquate Beschreibung der Testabsorption liefern, wenn der Einschaltvorgang der Wechselwirkung in diese einbezogen wird.

Dazu werden zunächst die Ergebnisse für die Inversion in nullter Ordnung im Testfeld betrachtet, da letztere eine Eingangsgröße für die Berechnung der linearen Testabsorption darstellt. In Abb. 4.17 sind exakte und genäherte Zeitverläufe der Inversion für unterschiedliche Einschaltzeiten verglichen. Im Anfangsbereich stimmen die Zeitentwicklungen noch in den Details überein, während auf einer größeren Zeitskala insbesondere die Frequenzen der Rabioszillationen auseinanderlaufen. Entscheidend für die spätere Berechnung der Testabsorption ist jedoch, daß die zeitlichen Mittelwerte der genäherten Inversion unabhängig von der Einschaltzeit gut mit den exakten übereinstimmen.

Die genäherten und exakten Ergebnisse für die Testabsorption bei langsam eingeschalteter Wechselwirkung sind in Abb. 4.18 verglichen. In Abb. 4.18.a wurde ein kohärentes Pumpfeld angenommen, während in Abb. 4.18.b die Spektren für ein phasengequetschtes Pumpfeld mit  $\xi = -0, 8$  gezeigt sind. Die Pumpverstimmung ist in der Größenordnung der Rabifrequenz gewählt, und die mittlere Photonenzahl überschreitet die Zahl der Störstellen wesentlich. Die exakten und genäherten Ergebnisse zeigen eine hervorragende Übereinstimmung. Insbesondere wird die Auswirkung der Photonenzahlstatistik auf die Linienform auch bei langsam

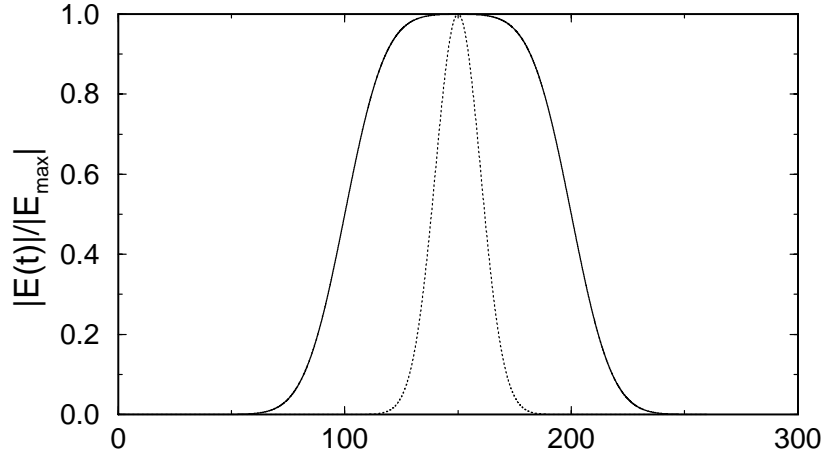


Abbildung 4.19: Einhüllende des Pumpimpulses (durchgezogene Kurve) und des Testimpulses (gepunktete Kurve).

eingeschalteter Wechselwirkung richtig erfaßt. Die Übereinstimmung zwischen den exakten und genäherten Ergebnissen verschlechtert sich allerdings wie oben bei kleineren Pumpverstimmungen und für Verhältnisse  $N/\langle n \rangle$ , die sich der Eins nähern.

### Das gepulste Pump-Test-Experiment an störstellengebundenen Exzitationen

Nachdem die Auswirkung einer langsam eingeschalteten Wechselwirkung der BX mit dem Pumpfeld auf die Testabsorption im optischen Stark-Effekt diskutiert wurde, soll hier das gepulste Pump-Test-Experiment an BX betrachtet werden. Die inhomogene Verbreiterung der BX wird dabei berücksichtigt, wobei eine Verteilung der Verstimmungen  $\{\Delta_\nu, \nu = 1, \dots, N\}$  gemäß (4.26) gewählt wird. Die Ergebnisse, die in diesem Teil berechnet wurden, folgen aus Dichtematrixgleichungen mit zeitabhängiger Kopplung an das Pumpfeld  $g(t)$  und zeitabhängiger Testfeldamplitude  $A(t)$ .

Weiter wird davon ausgegangen, daß sich Pump- und Testpuls optimal zeitlich überlagern und zudem der Pumpimpuls länger andauert als der Testpuls. Die Einhüllenden von Pump- und Testpuls sind in Abb. 4.19 wiedergegeben. Dabei werden die ansteigende und absteigende Flanke des Pumpimpulses mit  $g(t)$  aus (4.42) beschrieben. Die Dauer des Pumpimpulses wird mit  $\Delta\tau_p$  bezeichnet. Die Einhüllende des Testpulses wird durch eine Gaußfunktion der Breite  $\Delta\tau_t$  beschrieben.

Da der Testpuls kürzer als der Pumpimpuls ist, begrenzt seine Dauer die spektrale Auflösung für das Testabsorptionsspektrum. Um dies zu illustrieren sind in Abb. 4.20 die Testabsorptionsspektren für ein kohärentes und ein phasengequetschtes Pumpfeld verglichen, wobei in Abb. 4.20.a ein langer Testpuls mit

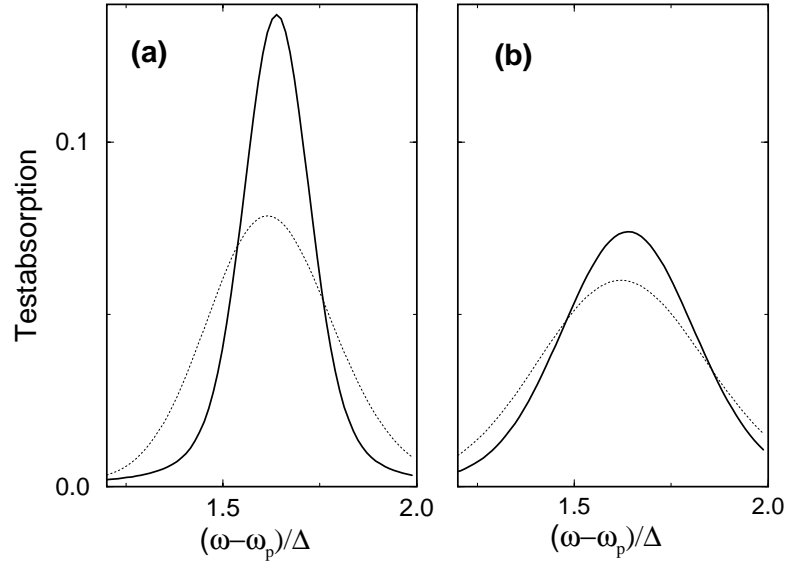


Abbildung 4.20: Testabsorption für Testpulse unterschiedlicher Dauer: (a)  $\Delta\tau_t \cdot \Omega = 5$ , (b)  $\Delta\tau_t \cdot \Omega = 1$ . Es wurde jeweils ein kohärentes (durchgezogene Kurven) und ein phasengequetschtes Pumpfeld (gepunktete Kurven) mit  $\xi = -0,8$  angenommen. Parameter:  $N = 5$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\Delta = 12g$ ,  $\gamma = 0,4g$ ,  $\Delta\tau_p \cdot \Omega = 100$ ,  $\tau_p \cdot \Omega = 20$ .

$\Delta\tau_t \cdot \Omega = 5$  und in Abb. 2.22.b ein kurzer Testpuls mit  $\Delta\tau_t \cdot \Omega = 1$  angenommen wurde.  $\Omega$  ist hier die Rabifrequenz bezüglich der maximalen Intensität des Pumpfeldes. Um den Einfluß des endlichen Testpulses auf die Testabsorption besonders deutlich zu demonstrieren, wurde hier die inhomogene Verbreiterung vernachlässigt. Der begrenzende Verbreiterungsmechanismus ist dann das endliche Auflösungsvermögen aufgrund der spektralen Breite des Testpulses. Während für den langen Testpuls der Einfluß der Photonenzustatistik des Pumpfeldes auf die Linienform deutlich erkennbar ist (Abb. 4.20.a), ist für den kurzen Testpuls der Einfluß der Photonenzustatistik auf die Linienform aufgrund der begrenzten spektralen Auflösung verwischt (Abb. 4.20.b).

Folglich sollte für ein Pump-Test-Experiment, das den Einfluß eines gequetschten Pumpfeldes auf die Linienform sichtbar macht, der Testpuls ein Vielfaches der inversen Rabifrequenz bezüglich der maximalen Pumpintensität andauern.

Insbesondere zeigen die Ergebnisse in Abb. 4.20, daß sich auch in einem gepulsten Pump-Test-Experiment die gequetschte Photonenzustatistik in der Linienform widerspiegeln kann. Neben einer ausreichenden spektralen Auflösung muß jedoch auch hier gewährleistet sein, daß die inhomogene Verbreiterung nicht zu groß ist. Der Einfluß der inhomogenen Verbreiterung auf die Linienform in einem gepulsten Pump-Test-Experiment ist in Abb. 4.21 gezeigt. Das Pumpfeld wurde jeweils in einem amplitudengequetschten (gepunktete Kurven), einem kohärenten (durch-

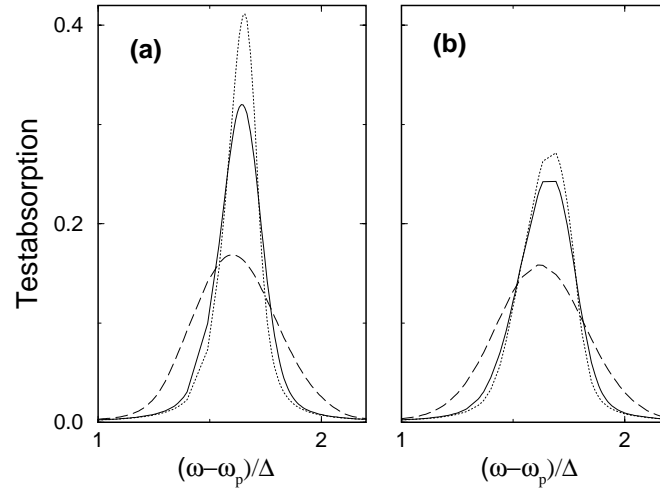


Abbildung 4.21: Testabsorption in einem gepulsten Pump-Test-Experiment mit den inhomogenen Verbreiterungen (a)  $\Gamma = 2g$ , (b)  $\Gamma = 4g$ . Es wurde jeweils ein kohärentes (durchgezogene Kurven), ein amplitudengequetschtes (gepunktete Kurven,  $\xi = 1$ ) und ein phasengequetschtes (gestrichelte Kurven,  $\xi = -1$ ) Pumpfeld angenommen. Parameter:  $N = 10$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\Delta = 12g$ ,  $\gamma = 0,4g$ ,  $\Delta\tau_p \cdot \Omega = 100$ ,  $\tau_p \cdot \Omega = 20$ ,  $\Delta\tau_t \cdot \Omega = 20$ . Die Knicke entstehen, da aus Rechenzeitgründen nur wenig Punkte bestimmt wurden.

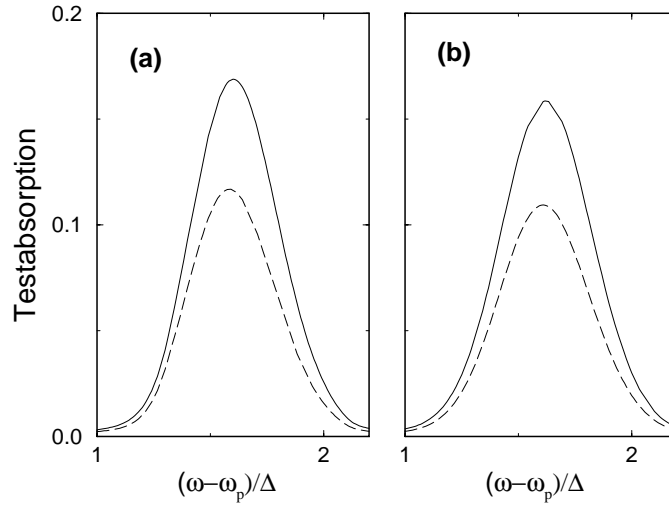


Abbildung 4.22: Testabsorption in einem gepulsten Pump-Test-Experiment mit den inhomogenen Verbreiterungen (a)  $\Gamma = 2g$ , (b)  $\Gamma = 4g$  für unterschiedliche Anstiegszeiten  $\tau_p$  des Pumpimpulses. Durchgezogene Kurve:  $\tau_p \cdot \Omega = 20$ , gestrichelte Kurve:  $\tau_p \cdot \Omega = 0,1$ . Es wurde ein phasengequetschtes Pumpfeld ( $\xi = -1$ ) angenommen. Parameter:  $N = 10$ ,  $\langle n \rangle = 60$ ,  $\Delta = 12g$ ,  $\gamma = 0,4g$ ,  $\Delta\tau_p \cdot \Omega = 100$ ,  $\Delta\tau_t \cdot \Omega = 20$ . Die Knicke entstehen, da aus Rechenzeitgründen nur wenige Punkte bestimmt wurden.

gezogene Kurven) und einem phasengequetschten Zustand (gestrichelte Kurven) angenommen. Ist die inhomogene Verbreiterung klein (Abb. 4.21.a), so wird die Linienform stark durch die Photonenstatistik modifiziert. Bei einer größeren inhomogenen Verbreiterung sind die Unterschiede der Linienformen für die unterschiedlichen Pumpfelder geringer (Abb. 4.21.b), wobei besonders der Unterschied zwischen der amplitudengequetschten und der kohärenten Photonenstatistik klein wird.

Die Höhe der Testabsorption wird im gepulsten Experiment durch die Anstiegszeit des Pumpimpulses  $\tau_p$  festgelegt. In Abb. 4.22 ist dazu die Testabsorption für ein phasengequetschtes Pumpfeld für zwei unterschiedliche inhomogene Verbreiterungen gezeigt. Die gestrichelten Kurven zeigen die Spektren für kleine Anstiegszeit ( $\tau_p \cdot \Omega = 0,1$ ), während die durchgezogenen Kurven die Spektren für einen langsam ansteigenden Pumpimpuls ( $\tau_p \cdot \Omega = 20$ ) darstellen. Unabhängig von der inhomogenen Verbreiterung ändert sich die Höhe der verschobenen Resonanzen mit  $\tau_p$ , während die Linienform erhalten bleibt. Im Rahmen der vorangegangenen Diskussion der endlichen Einschaltzeit der Wechselwirkung ist dieses Ergebnis sofort verständlich. Bemerkenswert an Abb. 4.22.a ist, daß die Asymmetrie der phasengequetschten Photonenstatistik sich bei genauem Hinsehen trotz inhomogener Verbreiterung und gepulstem Experiment in der Linienform widerspiegelt.

### 4.3.3 Zusammenfassung von Abschnitt 4.3

- In einem gepulsten Pump-Test-Experiment an BX kann die Linienform der durch den optischen Stark-Effekt verschobenen Resonanz die Photonenstatistik des Pumpfeldes widerspiegeln. Für eine ausreichend große spektrale Auflösung muß die Dauer des Testpulses ein Vielfaches der inversen maximalen Rabi-Frequenz bezüglich des Pumpfeldes betragen. Die inhomogene Verbreiterung sollte die maximale Kopplung  $g_0$  an das Pumpfeld nur um maximal eine Größenordnung überschreiten.
- Die Einschaltzeit des Pumpimpulses modifiziert die Höhe der verschobenen Resonanz. Die Linienform der Resonanz bleibt weitgehend erhalten.
- Bei sehr langsamem Einschalten des Pumpfeldes verschwinden die nicht-klassische Verstärkung. Gleiches gilt für die Unterstrukturen, die innerhalb der Resonanzen für  $N > 1$  auftreten.

## 4.4 Dissipative Effekte

In den vorangehenden Abschnitten dieser Arbeit sind dissipative Effekte stets in Form einer phänomenologischen Dämpfungskonstanten einbezogen worden. In diesem Abschnitt sollen die Dämpfungsmechanismen sorgfältiger behandelt werden, wobei der Formalismus der Quantenmastergleichung zur Ableitung der Dichtematrixgleichungen benutzt werden soll.

### 4.4.1 Ableitung der Dichtematrixgleichungen

Für das betrachtete Pump-Test-Experiment an störstellengebundenen Exzitonen ( $BX$ ) sind die dissipativen Effekte zum einen der strahlende Zerfall der  $BX$ . Zum anderen koppeln die Pumpphotonen aufgrund der endlichen Reflektivität der Resonatorspiegel an externe Moden. Dies hat zur Folge, daß effektiv Photonen aus dem optischen Resonator in die Umgebung austreten.

Die Behandlung dieser beiden Zerfallskanäle im Rahmen einer Quantenmastergleichung ist gut bekannt. Für den reduzierten Dichteoperator  $\rho$ , der den Zustand des Pumpfeldes und der  $BX$  beschreibt, lautet die Mastergleichung [38]:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho = & -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho] + \frac{\gamma_c}{2}(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \\ & + \frac{\gamma_r}{2}(2J_- \rho J_+ - J_+ J_- \rho - \rho J_+ J_-). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Hier beschreibt  $\gamma_c$  die Zerfallsrate von Pumpphotonen in Moden des umgebenden Strahlungsreservoirs, daß bei  $T = 0$  angenommen wird, und  $\gamma_r$  die spontane Zerfallsrate der  $BX$ .  $\mathcal{H}$  ist der Hamiltonoperator, der die Wechselwirkung der  $BX$  mit Pump- und Testfeld beschreibt, und der bereits in (4.1) und (4.2) angegeben wurde.

Wird das Testfeld in (4.43) vernachlässigt, so führt die asymptotische Lösung der Mastergleichung für  $t \rightarrow \infty$  auf den Grundzustand des Systems, in dem weder  $BX$  noch Pumpphotonen angeregt sind.

Weiter muß berücksichtigt werden, daß im Pump-Test-Experiment das Pumpfeld mit einer externen Lichtquelle angeregt wird, wie es in Abb. 4.23 gezeigt ist. Dabei besteht die externe Lichtquelle in der Regel ihrerseits aus einem optischen Resonator, der ein Lasermedium oder einen nichtlinearen Kristall (im Falle des optischen parametrischen Oszillators (OPO)) enthält. Die Lichtquelle wird durch einen Pumpprozeß getrieben. Vereinfacht soll angenommen werden, daß die Lichtquelle ein monochromatisches Lichtfeld liefert. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen der externen Lichtquelle werden mit  $b$  und  $b^\dagger$  bezeichnet. Die Photonen werden mit der Rate  $\gamma_l$  in das umgebende Reservoir emittiert. Des weiteren befindet sich zwischen der Lichtquelle und dem Experiment eine sogenannte optische Diode, die unter Ausnutzung des Faraday-Effekts nur Photonen in einer Richtung passieren läßt. Auf diese Weise wird vermieden, daß die Dynamik des Experiments auf die Lichtquelle zurückwirkt.

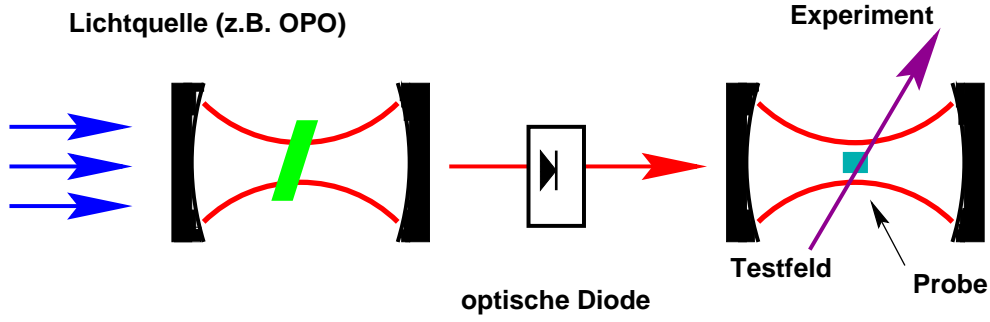


Abbildung 4.23: Pump-Test-Experiment mit externer Lichtquelle. Die Rückwirkung des Experiments auf die Lichtquelle wird durch eine optische Diode verhindert.

Der reduzierte Dichteoperator  $\rho_b$ , der den Zustand des Feldes der Lichtquelle beschreibt, genügt seinerseits einer Mastergleichung der Form:

$$\partial_t \rho_b = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_b, \rho_b] + \mathcal{P} \rho_b + \frac{\gamma_l}{2} (2b \rho_b b^\dagger - b^\dagger b \rho_b - \rho_b b^\dagger b) \quad (4.44)$$

mit

$$\mathcal{H}_b = \hbar \omega_l b^\dagger b.$$

Hier beschreibt der Superoperator  $\mathcal{P}$  den Pumpprozeß, sowie die nichttriviale Dynamik der Lichtquelle.  $\omega_l$  ist die Frequenz der Photonen, welche die Lichtquelle emittiert. Im folgenden soll angenommen werden, daß sich die externe Lichtquelle in einem stationären Zustand  $\rho_b^{(st)}$  befindet, der den Gleichungen

$$\mathcal{P} \rho_b^{(st)} + \frac{\gamma_l}{2} (2b \rho_b^{(st)} b^\dagger - b^\dagger b \rho_b^{(st)} - \rho_b^{(st)} b^\dagger b) = 0 \quad (4.45)$$

und

$$\partial_t \rho_b^{(st)} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_b, \rho_b^{(st)}] \quad (4.46)$$

genügt.

Als nächster Schritt ist die rückkopplungsfreie Anregung der Pumpmode durch die externe Lichtquelle zu beschreiben. Ein solches Problem wurde in zwei gleichzeitig erschienenen Arbeiten von H. Carmichael und C. W. Gardiner behandelt [75, 76]. Nach dem dort vorgestellten Formalismus wird der Pumpprozeß der externen Lichtquelle durch folgenden Zusatzterm in der Mastergleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho|_{\text{pump}} &= \kappa (a \rho b^\dagger + b \rho a^\dagger - \rho b^\dagger a - a^\dagger b \rho) \\ \text{mit } \kappa &= \sqrt{\gamma_l \gamma_c}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Da die Lichtquelle in einem stationären Zustand angenommen wird und keine Rückkopplung des Pump-Test-Experiments auf die Lichtquelle erfolgt, wird damit die gesamte Mastergleichung gegeben durch:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_b, \rho] - \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho] + \kappa(a\rho b^\dagger + b\rho a^\dagger - \rho b^\dagger a - a^\dagger b\rho) \\ &\quad + \frac{\gamma_c}{2}(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\gamma_r}{2}(2J_- \rho J_+ - J_+ J_- \rho - \rho J_+ J_-)\end{aligned}\quad (4.48)$$

Es ist zu erwarten, daß die Mastergleichung eine stationäre Lösung für  $\rho$  hat, bei der die dissipativen Verluste durch die externe Lichtquelle ausgeglichen werden. Der Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$ , der hier durch

$$\mathcal{K} = b^\dagger b + a^\dagger a + J_3 + \frac{N}{2} \quad (4.49)$$

gegeben wird, stellt nun nicht mehr wie bisher eine Erhaltungsgröße des Systems ohne das Testfeld dar.

Werden aus der Mastergleichung die Dichtematrixgleichungen für die testinduzierte Polarisierung abgeleitet, so hat die Nichterhaltung von  $\mathcal{K}$  zur Folge, daß die bisherige Entkopplung von Korrelationen zwischen unterschiedlichen  $BX$  nicht mehr ausreicht, um einen endlichen Satz von Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Es wird für die Ableitung der Dichtematrixgleichungen ein Anfangszustand  $\rho_0$  angenommen, bei dem sich die Lichtquelle in ihrem stationären Zustand befindet und bei dem weder Pumpphotonen noch  $BX$  angeregt sind:

$$\rho_0 = \rho_b^{(st)} \otimes \left| n_a = 0, m = -\frac{N}{2} \right\rangle \left\langle n_a = 0, m = -\frac{N}{2} \right|. \quad (4.50)$$

Sind  $\rho_{n_b, n_b'}^{(st)}$ , die Matrixelemente von  $\rho_b^{(st)}$ , so läßt sich der (zeitabhängige) Erwartungswert einer Observablen Operators  $\mathcal{O}$  darstellen als:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}(t) \rangle &= \sum_{n_b, n_b'} \rho_{n_b, n_b'}^{(st)} \langle \mathcal{O}(t) \rangle_{n_b, n_b'} \\ &\quad \text{mit } \langle \mathcal{O}(t) \rangle_{n_b, n_b'} = \text{Tr}(\rho_{n_b, n_b'}(t) \mathcal{O})\end{aligned}\quad (4.51)$$

Hier ist mit  $\rho_{n_b, n_b'}(t)$  die Zeitentwicklung des Operators

$$\rho_{n_b, n_b'}(t=0) = \left| n_b, n_a = 0, m = -\frac{N}{2} \right\rangle \left\langle n_b', n_a = 0, m = -\frac{N}{2} \right| \quad (4.52)$$

gemäß der Mastergleichung (4.48) bezeichnet. Die Zerlegung (4.51) ist aufgrund der Linearität der Mastergleichung möglich.

Für die Berechnung des Testabsorptionsspektrums müssen die Bewegungsgleichungen für den linearen Anteil von  $\langle J_-(t) \rangle_{n_b, n_b'}$  betrachtet werden. Als Eingangsgrößen gehen in diese Gleichungen die Erwartungswerte der Inversion  $J_3$



und der daran gekoppelten Größen in nullter Ordnung im Testfeld ein. Die Dichtematrixgleichungen für diese Größen sollen als erstes betrachtet werden.

### Dichtematrixgleichungen für die Inversion

Der Operator  $J_3$ , sowie die daran gekoppelten Operatoren, vertauschen in nullter Ordnung im Testfeld mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  aus (4.49). In Anhang C wird gezeigt, daß die Mastergleichung (4.48) in nullter Ordnung im Testfeld Matricelemente von  $\rho$ , die nichtdiagonal bzgl.  $\mathcal{K}$  sind, nur an solche Matricelemente koppelt, die ebenfalls nichtdiagonal bzgl.  $\mathcal{K}$  sind. Es folgt in Kombination mit der Anfangsbedingung (4.50):

$$\langle J_3(t) \rangle_{n_b, n'_b} \equiv 0, \text{ falls } n_b \neq n'_b. \quad (4.53)$$

Damit gilt:

$$\langle J_3(t) \rangle = \sum_{n_b} p_{n_b} \langle J_3(t) \rangle_{n_b}, \quad (4.54)$$

wobei  $p_{n_b}$  die Photonenstatistik der Lichtquelle ist und  $\langle J_3(t) \rangle_{n_b}$  als Abkürzung für  $\langle J_3(t) \rangle_{n_b, n_b}$  benutzt wurde.  $\langle J_3(t) \rangle_{n_b}$  ist dabei als Erwartungswert für eine Lichtquelle mit  $n_b$  Photonen zu interpretieren.

Aufgrund der inhomogenen Verbreiterung sind die Dichtematrixgleichungen für die Größe  $\langle J_{\nu,3}(t) \rangle_{n_b}$  abzuleiten, wobei  $J_{\nu,3}$  die Inversion bezogen auf die  $\nu$ -te Störstelle bezeichnet. Der Erwartungswert der gesamten Inversion wird anschließend mit

$$\langle J_3(t) \rangle_{n_b} = \sum_{\nu=1}^N \langle J_{\nu,3}(t) \rangle_{n_b} \quad (4.55)$$

berechnet. Die Dichtematrixgleichungen für  $\langle J_{\nu,3}(t) \rangle_{n_b}$  folgen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p_{\nu}^{(+)} &= aJ_{\nu,+} + a^{\dagger}J_{\nu,-}; & p_{\nu}^{(-)} &= -i(aJ_{\nu,+} - a^{\dagger}J_{\nu,-}); \\ \chi_{\nu}^{(+)} &= bJ_{\nu,+} + b^{\dagger}J_{\nu,-}; & \chi_{\nu}^{(-)} &= -i(bJ_{\nu,+} - b^{\dagger}J_{\nu,-}); \\ \pi^{(+)} &= ba^{\dagger} + b^{\dagger}a; & \pi^{(-)} &= -i(ba^{\dagger} - b^{\dagger}a) \end{aligned}$$

und  $\Delta_c = \omega_l - \omega_p$  zu

$$\begin{aligned} \partial_t \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} &= g \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} - \gamma_r \left( \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\gamma_r}{2} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle c_{\nu, \nu'}^{(+)} \rangle_{n_b} \\ \partial_t \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} &= -\Delta_{\nu} \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} - \kappa \langle \chi_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} + g \sum_{\nu' \neq \nu} \langle c_{\nu, \nu'}^{(-)} \rangle_{n_b} \\ &\quad - \frac{\gamma_c + \gamma_r}{2} \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \sum_{\nu' \neq \nu} \langle p_{\nu'}^{(+)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle p_\nu^{(-)} \rangle_{n_b} &= \Delta_\nu \langle p_\nu^{(+)} \rangle_{n_b} - 4g \langle a^\dagger a J_{\nu,3} \rangle_{n_b} - 2g \left( \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \kappa \langle \chi_\nu^{(-)} \rangle_{n_b} - g \sum_{\nu' \neq \nu} \langle c_{\nu,\nu'}^{(+)} \rangle_{n_b} - \frac{\gamma_c + \gamma_r}{2} \langle p_\nu^{(-)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \sum_{\nu' \neq \nu} \langle p_{\nu'}^{(-)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle \chi_\nu^{(+)} \rangle_{n_b} &= -(\Delta_\nu - \Delta_c) \langle \chi_\nu^{(-)} \rangle_{n_b} + 2g \langle \pi^{(-)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
&\quad - \frac{\gamma_r}{2} \langle \chi_\nu^{(+)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \chi_{\nu'}^{(+)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle \chi_\nu^{(-)} \rangle_{n_b} &= (\Delta_\nu - \Delta_c) \langle \chi_\nu^{(+)} \rangle_{n_b} - 2g \langle \pi^{(+)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
&\quad - \frac{\gamma_r}{2} \langle \chi_\nu^{(-)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \chi_{\nu'}^{(-)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Im Unterschied zu den vorangehenden Abschnitten kann nicht mehr die Erhaltung des Anregungszahloperators an dieser Stelle ausgenutzt werden. Um ein endliches System von Bewegungsgleichungen zu erhalten wird zusätzlich eine näherungsweise Entkopplung von anregungszahlerhaltenden Kombinationen von Photonenoperatoren durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger a J_{\nu,3} \rangle_{n_b} &\simeq \langle a^\dagger a \rangle_{n_b} \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b}, \\
\langle \pi^{(\pm)} J_{\nu,3} \rangle_{n_b} &\simeq \langle \pi^{(\pm)} \rangle_{n_b} \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Anschließend müssen weitere Bewegungsgleichungen für  $\langle a^\dagger a \rangle_{n_b}$  und  $\langle \pi^{(\pm)} \rangle_{n_b}$  aufgestellt werden. Werden zusätzlich Korrelationen zwischen unterschiedlichen  $BX$  gemäß (3.11) entkoppelt, so folgt ein abgeschlossenes System von Dichtematrixgleichungen, für  $\langle J_{\nu,3}(t) \rangle_{n_b}$ , welches explizit in Anhang D angegeben wird.

### Dichtematrixgleichungen für die testinduzierte Polarisation

Für die Berechnung der Testabsorption ist wie bisher die testinduzierte lineare Polarisation  $\langle J_-^{(1)}(t) \rangle$  zu berechnen. Da diese Größe nur von Erwartungswerten von Operatoren getrieben wird, die mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  vertauschen, so gilt:

$$\langle J_-^{(1)}(t) \rangle = \sum_{n_b=0}^{\infty} p_{n_b} \langle J_-^{(1)}(t) \rangle_{n_b}. \tag{4.58}$$

Aufgrund der inhomogenen Verbreiterung werden analog zur Inversion die Dichtematrixgleichungen für die Größe  $\langle J_{\nu,-}(t) \rangle_{n_b}$  abgeleitet. Es werden in diesen Gleichungen anregungszahlerhaltende Kombinationen von Photonenoperatoren und Korrelationen zwischen unterschiedlichen  $BX$  näherungsweise entkoppelt. Werden nur Terme linear im Testfeld berücksichtigt, so folgt ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned}
[i\partial_t - \omega_p + \mathbf{M}_\nu + \mathbf{L}_{\nu,1}(t)] \langle \phi_\nu^{(1)}(t) \rangle_{n_b} + \sum_{\nu' \neq \nu} \mathbf{L}_{\nu,2}(t) \langle \phi_{\nu'}^{(1)}(t) \rangle_{n_b} + \\
+ \mathbf{v}_1 \langle a^{(1)}(t) \rangle_{n_b} + \mathbf{v}_2 \langle b^{(1)}(t) \rangle_{n_b} = \tilde{g} \mathbf{I}_\nu(t) A e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

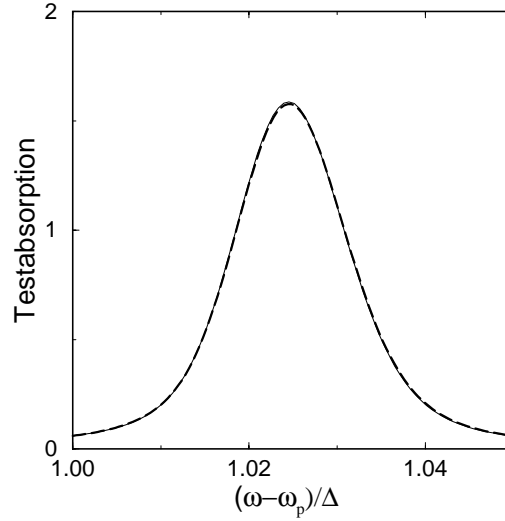


Abbildung 4.24: Vergleich des genäherten (gestrichelte Kurve) und des exakten (durchgezogene Kurve) Testabsorptionsspektrums. Die externe Lichtquelle emittiert ein kohärentes Lichtfeld. Weitere Parameter:  $N = 3$ ,  $\Delta = 30g$ ,  $\Delta_c = 0$ ,  $\langle n \rangle = 20$ ,  $\kappa = g$ . Es ist eine phänomenologische Verbreiterung von  $\gamma = 0,1g$  eingeführt worden.

mit

$$\phi_\nu(t) = (J_{\nu,-}, aJ_{\nu,3}, a^2 J_{\nu,+}, bJ_{\nu,3}, abJ_{\nu,+}, b^2 J_{\nu,+})^T. \quad (4.60)$$

Dabei enthalten die zeitabhängigen Matrizen  $\mathbf{L}_{\nu,1}(t)$  und  $\mathbf{L}_{\nu,1}(t)$ , sowie der Vektor  $\mathbf{I}_\nu(t)$ , welche explizit in Anhang D angegeben sind, Erwartungswerte von anregungszahlerhaltenden Operatoren, welche in nullter Ordnung im Testfeld zu berechnen sind. Mit weiteren Dichtematrixgleichungen für die globalen Größen  $\langle a^{(1)}(t) \rangle_{n_b}$  und  $\langle b^{(1)}(t) \rangle_{n_b}$ , welche gegeben sind durch

$$\begin{aligned} (i\partial_t - \omega_p) \langle a^{(1)} \rangle_{n_b} - g \sum_\nu \langle J_{\nu,-}^{(1)} \rangle_{n_b} + i\kappa \langle b^{(1)} \rangle_{n_b} + i\frac{\gamma_c}{2} \langle a^{(1)} \rangle_{n_b} &= 0 \\ (i\partial_t - \omega_l) \langle b^{(1)} \rangle_{n_b} &= 0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

folgt ein abgeschlossenes System von Bewegungsgleichungen. Aus diesem Gleichungssystem wird  $\langle J_-^{(1)} \rangle_{n_b}$  und damit die lineare Testabsorption aus dem Imaginärteil des Zeitmittels bestimmt.

#### 4.4.2 Test der Dichtematrixnäherung

Für die Berechnung der exakten Testabsorption müßte die Mastergleichung (4.48) exakt gelöst werden. Da jedoch die Anregungszahl keine Erhaltungsgröße mehr

darstellt, zerfällt die Dichtematrix nicht in unabhängige endlichdimensionale Untersysteme.

Um die zusätzliche Entkopplung testen zu können, wird daher ein exakt lösbares ‘Testsystem’ behandelt, welches, wie in Abb. 4.23 gezeigt, aus einem Pump-Test-Experiment mit externer Lichtquelle besteht. Vernachlässigt werden in dem Testsystem die Photonenverluste an die Umgebung sowie der strahlende Zerfall der BX. Auch wird der Einfluß der optischen Diode nicht berücksichtigt.

Der Hamiltonoperator, der dieses Testsystem adäquat beschreibt, wird gegeben durch

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V} + \hbar\omega_l b^\dagger b + \hbar\kappa(a^\dagger b + b^\dagger a), \quad (4.62)$$

wobei  $\mathcal{H}_0$  und  $\mathcal{V}$  bereits in (4.1) und (4.2) angegeben wurden und die Wechselwirkung der BX mit Pump- und Testfeld beschreiben.

Der testfeldunabhängige Teil des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}$  vertauscht mit dem Anregungszahloperator  $\mathcal{K}$  aus (4.49) und zerfällt folglich in endlichdimensionale Unterräume konstanter Anregungszahl.

Wird die inhomogene Verbreiterung der BX vernachlässigt, so ist die Dimension  $D$  des Unterraums der Anregungszahl  $k$  gegeben durch

$$D = (L+1)(k+1) - \frac{L(L+1)}{2} \quad \text{mit } L = \min(k, N). \quad (4.63)$$

Die lineare Testabsorption läßt sich wie bisher mit Hilfe der Eigenzustände (‘Dressed States’) in nullter Ordnung im Testfeld bestimmen. Alternativ werden für das Testsystem Dichtematrixgleichungen abgeleitet, wobei neben der Entkopplung von Korrelationen zwischen unterschiedlichen BX jetzt wie oben anregungszahlerhaltende Kombinationen von Photonenoperatoren entkoppelt werden.

In Abb. 4.24 sind die Ergebnisse für die Testabsorption in der Dichtematrixnäherung mit den exakten für das Testsystem verglichen. Die Pumpverstärkung überschreitet dabei die Rabifrequenz bezogen auf das Pumpfeld. Die Übereinstimmung zwischen den exakten und den genäherten Spektren ist sehr gut. Dies zeigt, daß die zusätzliche Entkopplung kaum Einfluß auf die Qualität der Dichtematrixnäherung hat.

### 4.4.3 Ergebnisse der Dichtematrixnäherung mit Dissipation

In diesem Teilabschnitt sollen die Dichtematrixgleichungen mit Dissipation betrachtet werden. Dabei soll als erster Punkt der Einfluß der Zerfallsrate der Pumpphotonen  $\gamma_c$  auf die Testabsorption diskutiert werden. In Abb. 4.25 sind die Testabsorptionsspektren für zwei unterschiedlich große Zerfallsraten  $\gamma_c$  gezeigt. Es wurde für die durchgezogenen Kurven angenommen, daß die Lichtquelle ein

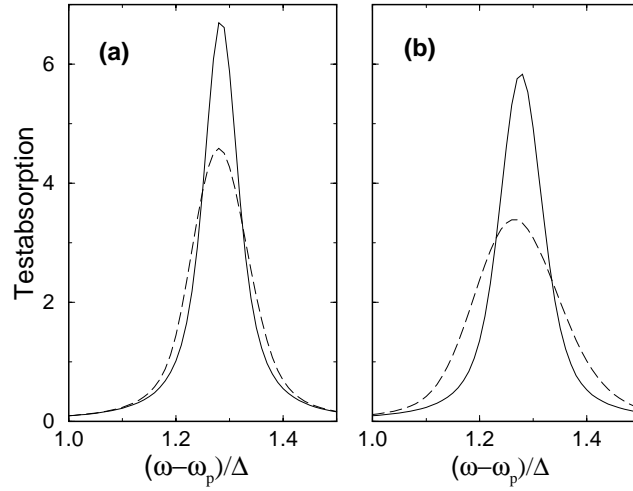


Abbildung 4.25: Verschobene Testabsorption für unterschiedliche Zerfallsraten der Pump photons  $\gamma_c$ . (a):  $\gamma_c = 3g$ ,  $\kappa = 0$ ,  $35g$ ,  $\langle b^\dagger b \rangle = 290$ ; (b):  $\gamma_c = g$ ,  $\kappa = 0$ ,  $2$ ,  $\langle b^\dagger b \rangle = 100$ . Durchgezogene Kurven:  $\xi = 0$ , gestrichelte Kurven:  $\xi = -1$ . Weitere Parameter:  $N = 1$ ,  $\Delta = 10g$ ,  $\Delta_c = 0$ ,  $\gamma_r = 0,5g$ .

kohärentes Lichtfeld emittiert, während für die gestrichelten Kurven ein phasen-gequetschtes Lichtfeld angenommen wurde. Die Intensität der Lichtquelle wurde jeweils so angepaßt, daß in allen Fällen die gleiche mittlere Stark-Verschiebung zu erwarten ist. Es wurde für diese Modellrechnung nur ein TLS betrachtet und damit auch die inhomogene Verbreiterung nicht berücksichtigt.

Trotz der Zerfallsrate  $\gamma_c$  macht sich die Photonenstatistik der Lichtquelle in der Linienform bemerkbar, wobei das phasengequetschte Licht eine deutliche Verbreiterung der verschobenen Resonanz hervorruft. Der Einfluß der Photonenstatistik auf die Linienform ist umso größer, je kleiner die Zerfallsrate  $\gamma_c$  ist, wie der Vergleich von Abb. 4.25.a und Abb. 4.25.b zeigt.

Unterschreitet die Zerfallsrate  $\gamma_c$  die Kopplungskonstante  $g$ , so kann der optische Stark-Effekt durch die sogenannte Modenaufspaltung beeinflusst werden. Die Modenaufspaltung entsteht bei starker Kopplung zwischen dem Resonatorfeld (Pumpfeld) und den nahresonanten TLS. Eine einfache Interpretation dieses Effekts ist, daß die TLS den internen Brechungsindex des optischen Resonators und somit die Eigenfrequenzen der erlaubten Moden ändern. Eine alternative Interpretation mit Hilfe der ‘Dressed States’ ist ebenfalls möglich. Der Effekt der Modenaufspaltung wurde sowohl an Atomen wie auch an Exzitonen in ‘Microcavities’ eingehend sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht [77, 78].

Der Einfluß der Modenaufspaltung auf den optischen Stark-Effekt ist in Abb. 4.26 demonstriert. Hier wurde die Testabsorption für zwei unterschiedliche Zerfallsraten  $\gamma_c$  berechnet, wobei für die Kurven (a) die Zerfallsrate  $\gamma_c$  kleiner ist als für die Kurven (b). Obwohl die Intensität der externen Lichtquelle so angepaßt wurde, daß für den leeren Resonator die gleiche Pumpintensität erreicht wird, ist die op-

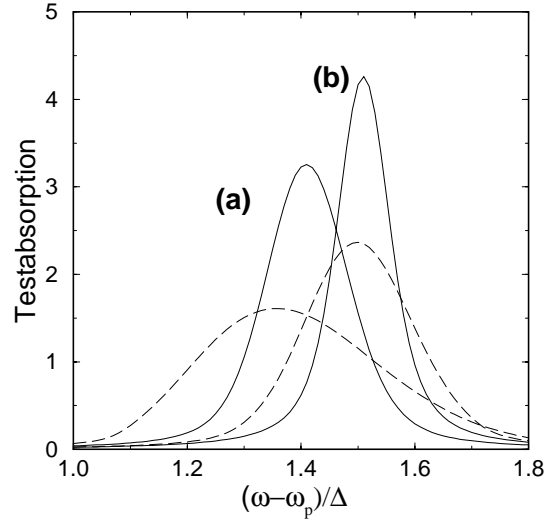


Abbildung 4.26: Verschobene Testabsorption für unterschiedliche Zerfallsraten der Pumpphotonen  $\gamma_c$ . (a):  $\gamma_c = 0, 25g$ ,  $\kappa = 0, 1g$ ,  $\langle b^\dagger b \rangle = 50$ ; (b):  $\gamma_c = g$ ,  $\kappa = 0, 2g$ ,  $\langle b^\dagger b \rangle = 200$ . Durchgezogene Kurven:  $\xi = 0$ , gestrichelte Kurven:  $\xi = -1$ . Weitere Parameter:  $N = 1$ ,  $\Delta = 10g$ ,  $\Delta_c = 0$ ,  $\gamma_r = 0, 5g$ .

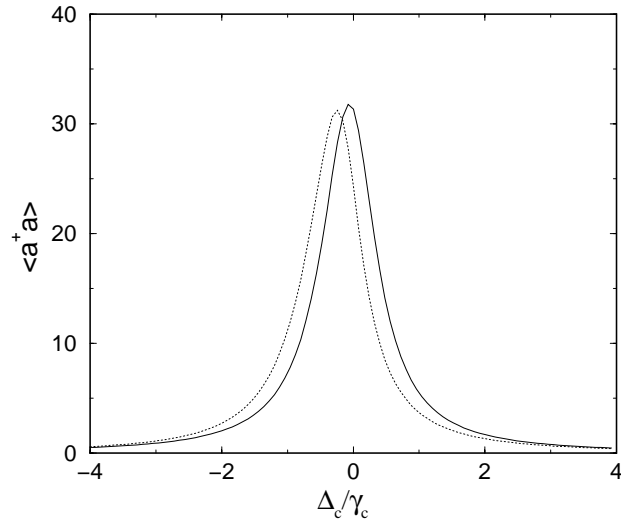


Abbildung 4.27: Mittlere Pumpphotonenzahl in Abhängigkeit der Verstimmung  $\Delta_c$  für die Zerfallsraten aus Abb. 4.26. Durchgezogene Kurve:  $\gamma_c = g$ , gepunktete Kurve:  $\gamma_c = 0, 25g$ .

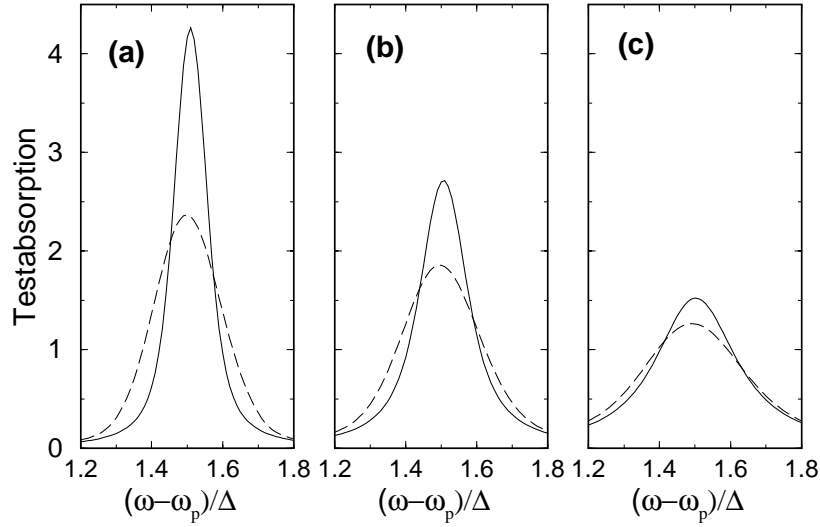


Abbildung 4.28: Testabsorptionsspektren für unterschiedliche spontane Zerfallsraten  $\gamma_r$ . (a)  $\gamma_r = 0,5g$ ; (b)  $\gamma_r = g$ ; (c)  $\gamma_r = 2g$ . Durchgezogene Kurven:  $\xi = 0$ , gestrichelte Kurve:  $\xi = -1$ . Weitere Parameter:  $N = 1$ ,  $\Delta = 10g$ ,  $\Delta_c = 0$ ,  $\langle b^\dagger b \rangle = 200$ ,  $\kappa = 0,2g$ .

tische Stark-Verschiebung für die kleinere Dämpfung  $\gamma_c$  geringer. Der Grund ist, daß sich für die kleinere Zerfallsrate  $\gamma_c$  die Eigenfrequenz des Resonators durch die Kopplung an das TLS leicht verschiebt. Dies ist in Abb. 4.27 illustriert, in der die mittlere Pumpphotonenzahl in Abhängigkeit von der Verstimmung  $\Delta_c$  zwischen Lichtfrequenz und ungestörter Eigenfrequenz des Resonators für die beiden Zerfallsraten  $\gamma_c$  aus Abb. 4.26 dargestellt ist. (Eine zweite sehr viel kleinere Mode in der Nähe der Übergangsfrequenz der TLS ist in Abb. 4.27 nicht zu sehen.)

Da sich bei kleinem  $\gamma_c$  die Eigenfrequenz des Resonators leicht verschiebt, dringen nicht so viele Pumpphotonen in den Resonator ein, wie es bei einem leeren Resonator der Fall wäre. Die Folge ist eine kleinere optische Stark-Verschiebung.

Bemerkt werden sollte weiter, daß die Linienform im optischen Stark-Effekt auch bei einer Modifikation durch die Modenaufspaltung stark von der Lichtquelle beeinflusst wird. Dies zeigt der Vergleich der durchgezogenen und gestrichelten Kurven in Abb. 4.26, die sich auf eine kohärente bzw. eine phasengequetschte Lichtquelle beziehen.

Während die bisherigen Untersuchungen zeigen, daß die Zerfallsrate  $\gamma_c$  zwar den optischen Stark-Effekt modifiziert, sich aber nicht in einer einfachen Verbreiterung der verschobenen Resonanz bemerkbar macht, so trifft letzteres auf die spontane Zerfallsrate  $\gamma_r$  der BX zu. Dazu sind in Abb. 4.28 die verschobenen Resonanzen für drei unterschiedliche Zerfallsraten  $\gamma_r$  dargestellt. Die Lichtquelle emittiert wie oben ein kohärentes bzw. ein phasengequetschtes Lichtfeld. Je größer  $\gamma_r$  ist, umso stärker ist die zusätzliche Verbreiterung der Linien aufgrund

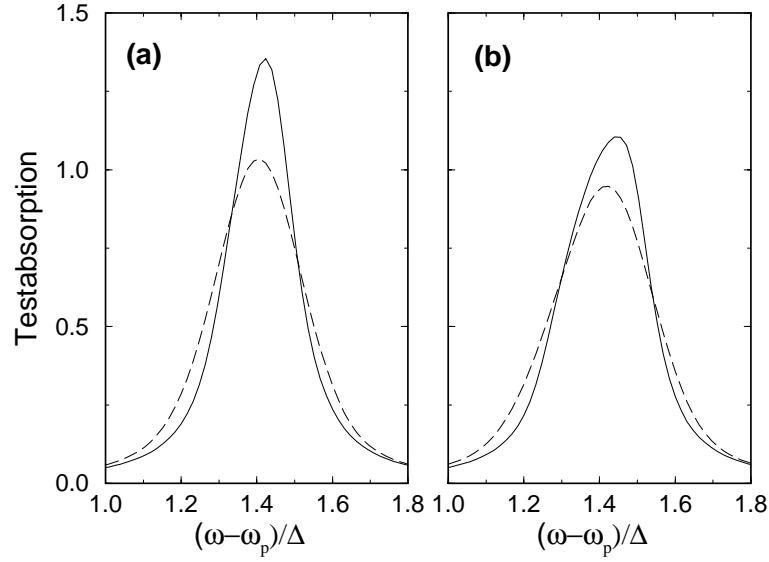


Abbildung 4.29: Einfluß der inhomogenen Verbreiterung auf die verschobene Testabsorption. (a)  $\Gamma = g$ ; (b)  $\Gamma = 2g$ . Durchgezogene Kurven:  $\xi = 0$ , gestrichelte Kurven:  $\xi = -1$ . Weitere Parameter:  $N = 8$ ,  $\Delta = 10g$ ,  $\Delta_c = 0$ ,  $\langle b^\dagger b \rangle = 200$ ,  $\gamma_r = 0,3g$ ,  $\gamma_c = g$ ,  $\kappa = 0,2g$ .

der Spontanemission und umso weniger macht sich der Einfluß der Photonenstatistik auf die Linienform bemerkbar.

Bei den bisherigen Modellrechnungen ist die inhomogene Verbreiterung der BX nicht einbezogen worden. Ebenso wurden kollektive Effekte nicht berücksichtigt, da stets ein einzelnes TLS angenommen wurde. Zum Abschluß soll daher der Einfluß der inhomogenen Verbreiterung diskutiert werden. In Abb. 4.29 ist das Testabsorptionsspektrum für zwei unterschiedliche inhomogene Verbreiterungen dargestellt, wobei wieder jeweils eine kohärente und eine phasengequetschte Lichtquelle angenommen wird. Mit steigender inhomogener Verbreiterung  $\Gamma$  wird der Einfluß der Photonenstatistik der Lichtquelle auf die Linienform schwächer, wie dies bereits in Abschnitt 4.2 diskutiert wurde. Dabei bleibt der Einfluß der Photonenstatistik noch erkennbar, solange die inhomogene Verbreiterung  $\Gamma$  die Kopplungskonstante  $g$  nicht wesentlich übersteigt. Bemerkt werden sollte hier auch, daß bei starker inhomogener Verbreiterung die Linienform asymmetrisch werden kann, wie es in Abb. 4.29.b zu sehen ist. Der Grund ist, daß die optische Stark-Verschiebung nichtlinear von der Verstimmung abhängt und zudem bei kleinen Verstimmungen ein Sättigungseffekt eintritt.

#### 4.4.4 Zusammenfassung von Abschnitt 4.4

- Dissipative Effekte wie die endliche mittlere Verweilzeit von Pumpphotonen im optischen Resonator oder der spontane Zerfall von BX lassen sich im



Rahmen einer Mastergleichung behandeln. Die Erhaltung der Anregungszahl wird durch dissipative Prozesse zerstört. Es werden deshalb zusätzlich anregungszahlerhaltende Kombinationen von Photonenoperatoren entkoppelt.

- Der Einfluß der Photonenstatistik der Lichtquelle auf die Linienform im optischen Stark-Effekt nimmt mit der Zerfallsrate der Pumpphotonen  $\gamma_c$  ab.
- Bei Zerfallsraten von Pumpphotonen  $\gamma_c$ , welche die Kopplungskonstante  $g$  unterschreiten, wird der optische Stark-Effekt durch die Modenaufspaltung modifiziert.
- Die spontane Zerfallsrate  $\gamma_r$  der BX bewirkt eine zusätzliche Verbreiterung der verschobenen Resonanz. Damit der Einfluß der Photonenstatistik erkennbar bleibt, sollte die spontane Zerfallsrate  $\gamma_r$  in der Größenordnung der Kopplungskonstanten  $g$  liegen.
- Die inhomogene Verbreiterung der BX beeinflusst die Linienform der verschobenen Resonanz zusätzlich. Die Abhängigkeit der Linienform von der Photonenstatistik bleibt erkennbar, solange die inhomogene Verbreiterung die Kopplungskonstante nicht wesentlich überschreitet.

## 4.5 Zusammenfassung von Kapitel 4

In diesem Kapitel ist ein Pump-Test-Experiment zum Nachweis des optischen Stark-Effekts an störstellengebundenen Exzitonen (BX) theoretisch untersucht worden. Das Pumpfeld wurde dabei quantisiert behandelt. In das theoretische Modell mußte die inhomogene Verbreiterung der BX einbezogen werden, da diese die anderen Verbreiterungsmechanismen dominiert.

Analog zu Kapitel 3 konnten Dichtematrixgleichungen zur Berechnung der linearen Testabsorption abgeleitet werden, wobei Korrelationen zwischen unterschiedlichen BX näherungsweise entkoppelt wurden. Aufgrund der inhomogenen Verbreiterung ist die Zahl der zu behandelnden Dichtematrixgleichungen nicht unabhängig von der Zahl der betrachteten Störstellen, sondern wächst mit dieser an. Der numerische Aufwand zur Lösung der Dichtematrixgleichungen ist jedoch weitaus geringer als bei exakter Bestimmung der Testabsorption. Letztere erfordert eine Diagonalisierung von Matrizen der Dimension  $2^N$ . Mit Hilfe der Dichtematrixgleichungen lassen sich bis zu 1000 Störstellen numerisch behandeln.

Mit der Entkopplung von Paarkorrelationen liefert die Dichtematrixnäherung gute Ergebnisse, wenn die Rabi-Frequenz von der Größenordnung der (mittleren) Pumpverstimmung ist. Die Ergebnisse lassen sich mit Hilfe eines Entkopplungsschemas, das zusätzlich die Anregungszahlerhaltung berücksichtigt, verbessern.

Der Einfluß der gequetschten Photonenstatistik auf die Linienform im optischen Stark-Effekt nimmt erwartungsgemäß mit zunehmender inhomogener Verbreiterung ab. Dabei bleibt jedoch die phasengequetschte Photonenstatistik deutlich in der Linienform erkennbar, solange die inhomogene Verbreiterung die Kopplungskonstante um nicht mehr als eine Größenordnung überschreitet.

Der Einfluß der inhomogenen Verbreiterung auf die Linienform hängt entscheidend von der Pumpverstimmung ab. Je kleiner die Pumpverstimmung ist, umso geringer fällt die Modifikation der Linienform durch die inhomogene Verbreiterung aus und desto deutlicher ist der Einfluß der Photonenstatistik.

Die inhomogene Verbreiterung erweist sich als besonders schädlich für den Nachweis der nichtklassischen Verstärkung. Diese verschwindet bereits bei inhomogenen Verbreiterungen in der Größenordnung der Kopplungskonstanten. Letzteres zeigt, daß die nichtklassische Verstärkung auf einem kollektiven Effekt fast identischer TLS beruht.

Weiter ist in diesem Kapitel der Einfluß von endlichen Pulsen auf die Testabsorption im optischen Stark-Effekt untersucht worden. Die Anstiegszeit des Pumpfeldes ändert die Höhe der verschobenen Resonanzen, während die Linienform weitgehend erhalten bleibt. Die Unterstrukturen für den Fall  $N > 1$  erweisen sich ebenfalls als abhängig von der Anstiegszeit, da sie im Grenzfall eines adiabatisch eingeschalteten Pumpfeldes verschwinden. Ebenso verhält es sich mit der nichtklassischen Verstärkung, was den engen Zusammenhang zwischen der nichtklassischen Verstärkung und den Unterstrukturen demonstriert.

Die Dauer des Testpulses begrenzt das spektrale Auflösungsvermögen. Um

den Einfluß der Pumpphotonenstatistik auf die Linienform studieren zu können, sollte der Testpuls mehrere Rabizyklen andauern.

Zum Abschluß sind dissipative Effekte, die durch die endliche Reflektivität der Spiegel und den spontanen Zerfall von BX hervorgerufen werden, im Rahmen einer Mastergleichung behandelt worden. Die bisher diskutierten Effekte, insbesondere der Einfluß der Photonenstatistik auf die Linienform, bleiben erhalten, wenn die Dissipationsraten nicht zu groß sind. Wichtig ist hier, daß die endliche mittlere Verweilzeit von Pumpphotonen im Resonator zwar die Linienform im optischen Stark-Effekt modifiziert, jedoch nicht zu einer einfachen Verbreiterung der Linie führt. Insbesondere kann bei einer großen mittleren Verweilzeit der Pumpphotonen im Resonator der optische Stark-Effekt durch die Modenaufspaltung modifiziert werden.

# Anhang A

## Dichtematrixgleichungen für die Inversion mit Paarkorrelationen

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p^{(+)} &= aJ_+ + a^\dagger J_-; \quad p^{(-)} = -i(aJ_+ - a^\dagger J_-); \\ \chi^{(+)} &= aJ_+J_3 + a^\dagger J_3J_-; \quad \chi^{(-)} = -i(aJ_+J_3 - a^\dagger J_3J_-); \\ \xi^{(+)} &= a^2J_+^2 + a^{\dagger 2}J_-^2; \quad \xi^{(-)} = -i(a^2J_+^2 - a^{\dagger 2}J_-^2). \end{aligned}$$

lassen sich die Dichtematrixgleichungen mit Paarkorrelationen für die Inversion in nullter Ordnung im Testfeld wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle J_3 \rangle_n &= g \langle p^{(-)} \rangle_n \\ \partial_t \langle p^{(+)} \rangle_n &= -\Delta \langle p^{(-)} \rangle_n \\ \partial_t \langle p^{(-)} \rangle_n &= \Delta \langle p^{(+)} \rangle_n + 4g \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \langle J_3 \rangle_n + 6g \langle J_3^2 \rangle_n - gN \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \\ \partial_t \langle J_3^2 \rangle_n &= 2g \langle \chi^{(-)} \rangle_n + g \langle p^{(-)} \rangle_n \\ \partial_t \langle \chi^{(+)} \rangle_n &= -\Delta \langle \chi^{(-)} \rangle_n + g \langle \xi^{(-)} \rangle_n \\ \partial_t \langle \chi^{(-)} \rangle_n &= \Delta \langle \chi^{(+)} \rangle_n - 6g \left( n - \frac{N}{2} + 1 \right) \langle J_3^2 \rangle_n + 2g \left( n - \frac{3}{2}N - \frac{N^2}{2} + 5 \right) \langle J_3 \rangle_n \\ &\quad + 24g \frac{N-2}{N} \langle J_3^2 \rangle_n \langle J_3 \rangle_n - 16g \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle J_3 \rangle_n^3 - g \langle \xi^{(+)} \rangle_n \\ &\quad + Ng \left( n - \frac{N}{2} + 1 \right) \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \\ \partial_t \langle \xi^{(+)} \rangle_n &= -2\Delta \langle \xi^{(-)} \rangle_n + 2g \left( n + \frac{N^2}{4} - 1 \right) \langle p^{(-)} \rangle_n + 4g \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \langle \chi^{(-)} \rangle_n \\ &\quad - 6g \frac{N-2}{N} \left( \langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2 \frac{N-1}{N} \langle J_3 \rangle_n^2 \right) \langle p^{(-)} \rangle_n - 12g \frac{N-2}{N} \langle J_3 \rangle_n \langle \chi^{(-)} \rangle_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle \xi^{(-)} \rangle_n &= 2\Delta \langle \xi^{(+)} \rangle_n - 2g \left( n + \frac{N^2}{4} - 1 \right) \langle p^{(+)} \rangle_n - 4g \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \langle \chi^{(+)} \rangle_n \\
&\quad + 6g \frac{N-2}{N} \left( \langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2 \frac{N-1}{N} \langle J_3 \rangle_n^2 \right) \langle p^{(+)} \rangle_n + 12g \frac{N-2}{N} \langle J_3 \rangle_n \langle \chi^{(+)} \rangle_n
\end{aligned}$$

# Anhang B

## Größen in den erweiterten Dichtematrixgleichungen (3.37)

Für die Vektoren  $\langle \mathbf{I}_0 \rangle$  und  $\langle \mathbf{I}_1 \rangle$  in den erweiterten Dichtematrixgleichungen gilt:

$$\langle \mathbf{I}_0(t) \rangle_n = \begin{array}{|c|} \hline -2\langle J_3 \rangle_n \\ \hline \langle aJ_+ \rangle_n \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) + \langle J_3 \rangle_n - 3\langle J_3^2 \rangle_n \\ \hline 2\langle aJ_+ J_3 \rangle_n + \langle aJ_+ \rangle_n \\ \hline \langle a^2 J_+^2 \rangle_n \\ \hline 0 \\ \hline -(4\langle a^\dagger J_3 J_- \rangle_n + 2\langle a^\dagger J_- \rangle_n) \\ \hline \end{array}$$

$$\langle \mathbf{I}_1(t) \rangle_n = \begin{array}{|c|} \hline \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) - \langle J_3^2 \rangle_n - \langle J_3 \rangle_n \\ \hline \langle aJ_+ J_3 \rangle_n + \langle aJ_+ \rangle_n \\ \hline \langle a^2 J_+^2 \rangle_n \\ \hline \langle aJ_+ \rangle_n \\ \hline -[(1 + 3\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n)\langle J_3^2 \rangle_n + (1 - \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) - 2\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}\langle J_3 \rangle_n^2)\langle J_3 \rangle_n] \\ \hline [1 + \frac{N-2}{N}(\langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3 \rangle_n^2)]\langle aJ_+ \rangle_n + [2\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n + 1]\langle aJ_+ J_3 \rangle_n \\ \hline (\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n - 1)\langle a^2 J_+^2 \rangle_n + (\frac{N-2}{N} - 2\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}\langle J_3 \rangle_n)\langle aJ_+ \rangle_n^2 + 2\frac{N-2}{N}\langle aJ_+ \rangle_n\langle aJ_+ J_3 \rangle_n \\ \hline \frac{N-2}{N}(3\langle a^2 J_+^2 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle aJ_+ \rangle_n^2)\langle aJ_+ \rangle_n \\ \hline -[2 - \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) + \frac{N-2}{N}(\langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3 \rangle_n^2)]\langle a^\dagger J_- \rangle_n - 2(\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n + 1)\langle a^\dagger J_3 J_- \rangle_n \\ \hline \end{array}$$

Auf den folgenden beiden Seiten sind die Matrizen  $\boldsymbol{M}_n$ ,  $\boldsymbol{D}$  und  $\boldsymbol{L}_n(t)$  angegeben.

$-\Delta$	$2g$	0	0	0	0	0	0	0	0
$g(n - \frac{N}{2} - 1)$	0	$-g$	0	$-2g$	0	0	0	0	0
0	$-2g(n - \frac{N}{2})$	$\Delta$	$-gN(\frac{N}{2} + 1)$	0	$4g$	0	0	0	0
$-g$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-g$	0	$-g\frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)$	$-\Delta$	$3g$	0	0	0	$g$
$g(n - \frac{N}{2} - 1)$	0	$-g$	0	$2g(n - \frac{N}{2})$	0	$2g$	0	0	0
0	$g(n + \frac{N}{2} - \frac{3}{4}N^2 + 1)$	0	$g\frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)(n - \frac{N}{2} + 1)$	0	$-3g(n - \frac{N}{2} + \frac{3}{2})$	$\Delta$	$-4g(n - \frac{N}{2})$	$2\Delta$	$-2g(n + \frac{N}{4} - \frac{3}{8}N^2 - 2)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2\Delta$
$2g(n + \frac{N}{4} + \frac{N^2}{8} - 1)$	0	0	0	$4g(n - \frac{N}{2})$	0	0	0	0	

$$M_n =$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$g$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-2g$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$g$	0	0	0	$2g$	0	0	0	0	0
0	$g$	0	$g\frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)$	0	$-3g$	0	0	0	0
0	0	$-2g$	0	0	0	$-4g$	0	0	0
$2g$	0	0	0	$4g$	0	0	0	0	0

$$D =$$



$\mathbf{L}_n(t) =$ 

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$4g$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_1(t)$	0	0	0	$-6\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n$	0	0	0	0
0	$c_2(t)$	0	$-\frac{5}{2}(N-2)\langle J_3 \rangle_n$	0	$10\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n$	0	0	0
0	0	$c_3(t)$	0	0	0	$14\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n$	0	0
$c_4(t)$	0	0	0	$-10\frac{N-2}{N}\langle J_3 \rangle_n$	0	0	0	0

wobei gilt:

$$c_1(t) = -3\frac{N-2}{N}(\langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3 \rangle_n^2),$$

$$c_2(t) = 5\frac{N-2}{N}(\langle J_3^2 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3 \rangle_n^2),$$

$$c_3(t) = 7\frac{N-2}{N}(\langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3 \rangle_n^2),$$

$$c_4(t) = -5\frac{N-2}{N}(\langle J_3^2 \rangle_n + \langle J_3 \rangle_n - 2\frac{N-1}{N}\langle J_3 \rangle_n^2).$$

# Anhang C

## Beweis von Gleichung (4.53)

Um Gleichung (4.53) zu beweisen, muß gezeigt werden, daß der Operator  $\rho_{n_b, n'_b}(t)$ , der die Zeitentwicklung von  $\rho_{n_b, n'_b}(t=0)$  in (4.52) gemäß der Mastergleichung (4.48) angibt, für  $n_b \neq n'_b$  in nullter Ordnung im Testfeld nichtdiagonal bzgl. der Anregungszahl bleibt.

Dazu schreiben wir die Mastergleichung (4.48) mit verschwindendem Testfeld als

$$\partial_t \rho = \mathcal{L} \rho,$$

wobei  $\mathcal{L}$  ein sogenannter Superoperator ist, der Operatoren linear auf Operatoren abbildet. Zudem soll hier die inhomogene Verbreiterung nicht berücksichtigt werden, was schlicht eine Vereinfachung der Notation darstellt. Der Zustand der BX läßt sich dann einfach durch die Drehimpulsquantenzahl  $m$  klassifizieren. Der Beweis der obigen Aussage mit inhomogener Verbreiterung folgt aber ganz analog. Für den Beweis von (4.53) werden zunächst zwei Hilfssätze bewiesen:

### Hilfssatz 1:

Sei

$$\mathcal{A} = |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|$$

ein Operator mit  $n_b + n_a + m \neq n'_b + n'_a + m'$ , so ist der Operator  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{L}\mathcal{A}$  nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl. Das heißt, daß für

$$\mathcal{B} = \sum_{\tilde{n}_b, \tilde{n}_a, \tilde{m}} \sum_{\tilde{n}'_b, \tilde{n}'_a, \tilde{m}'} b(\tilde{n}_b, \tilde{n}_a, \tilde{m}; \tilde{n}'_b, \tilde{n}'_a, \tilde{m}') | \tilde{n}_b, \tilde{n}_a, \tilde{m} \rangle \langle \tilde{n}'_b, \tilde{n}'_a, \tilde{m}' |$$

gilt:

$$b(\tilde{n}_b, \tilde{n}_a, \tilde{m}; \tilde{n}'_b, \tilde{n}'_a, \tilde{m}') \neq 0 \implies \tilde{n}_b + \tilde{n}_a + \tilde{m} \neq \tilde{n}'_b + \tilde{n}'_a + \tilde{m}'.$$

**Beweis:** Zum Beweis wird  $\mathcal{B} = \mathcal{L}\mathcal{A}$  explizit berechnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird  $\mathcal{L}$  dazu in fünf Terme zerlegt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5,$$

die den fünf Termen in (4.48) entsprechen. Die obige Aussage wird nun für die einzelnen Anteile gezeigt.

(I)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 = \mathcal{L}_1 \mathcal{A} &= -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_b, \mathcal{A}] \\ &= -i\omega_l (n_b - n'_b) |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|\end{aligned}$$

Für  $\mathcal{B}_1$  ist die zu beweisende Aussage damit trivialerweise erfüllt.

(II)

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{L}_2 \mathcal{A} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0, \mathcal{A}],$$

wobei  $\mathcal{H}_0$  der Anteil des Operators  $\mathcal{H}$  in (4.48) in nullter Ordnung im Testfeld ist. Da  $\mathcal{H}_0$  die Photonenzahl der Lichtquelle nicht beeinflußt und die Anregungszahl erhält, so gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 |n_b, n_a, m\rangle &= \sum_{\tilde{n}_a, \tilde{m}} \delta_{\tilde{n}_a + \tilde{m}, n_a + m} d_{\tilde{n}_a, \tilde{m}} |n_b, \tilde{n}_a, \tilde{m}\rangle \\ \langle n'_b, n'_a, m' | \mathcal{H}_0 &= \sum_{\tilde{n}'_a, \tilde{m}'} \delta_{\tilde{n}'_a + \tilde{m}', n'_a + m'} l_{\tilde{n}'_a, \tilde{m}'} \langle n'_b, \tilde{n}'_a, \tilde{m}'|.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 = \mathcal{L}_2 \mathcal{A} &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{\tilde{n}_a, \tilde{m}} \delta_{\tilde{n}_a + \tilde{m}, n_a + m} d_{\tilde{n}_a, \tilde{m}} |n_b, \tilde{n}_a, \tilde{m}\rangle \langle n'_b, n'_a, m'| - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\tilde{n}'_a, \tilde{m}'} \delta_{\tilde{n}'_a + \tilde{m}', n'_a + m'} l_{\tilde{n}'_a, \tilde{m}'} |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, \tilde{n}'_a, \tilde{m}'| \right].\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_2$  ist in Kombination mit der Definition von  $\mathcal{A}$  offensichtlich nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl.

(III)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3 = \mathcal{L}_3 \mathcal{A} &= \kappa (a \mathcal{A} b^\dagger + b \mathcal{A} a^\dagger - \mathcal{A} b^\dagger a - a^\dagger b \mathcal{A}) \\ &= \kappa (\sqrt{n_a n'_b} |n_a, n_a - 1, m\rangle \langle n'_b - 1, n'_a, m'| + \sqrt{n_b n'_a} |n_b - 1, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a - 1, m'| \\ &\quad - \sqrt{n'_b (n'_a + 1)} |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b - 1, n'_a + 1, m'| \\ &\quad - \sqrt{n_b (n_a + 1)} |n_b - 1, n_a + 1, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|)\end{aligned}$$

Damit ist auch  $\mathcal{B}_3$  nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl.

(IV)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_4 = \mathcal{L}_4 \mathcal{A} &= \frac{\gamma_c}{2} (2a \mathcal{A} a^\dagger - a^\dagger a \mathcal{A} - \mathcal{A} a^\dagger a) \\ &= \frac{\gamma_c}{2} (2\sqrt{n_a n'_a} |n_b, n_a - 1, m\rangle \langle n'_b, n'_a - 1, m'| - n_a |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'| - \\ &\quad - n'_a |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|)\end{aligned}$$

Damit ist auch  $\mathcal{B}_4$  offensichtlich nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl.

(V)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_5 &= \mathcal{L}_5 \mathcal{A} = \frac{\gamma_r}{2} (2J_- \mathcal{A} J_+ - J_+ J_- \mathcal{A} - \mathcal{A} J_+ J_-) \\ &= \frac{\gamma_r}{2} \left( 2 \sqrt{\left(\frac{N}{2} + m\right) \left(\frac{N}{2} - m + 1\right) \left(\frac{N}{2} + m'\right) \left(\frac{N}{2} - m' + 1\right)} \right) |n_b, n_a, m - 1\rangle \langle n'_b, n'_a, m' - 1| - \\ &\quad - \left( \left(\frac{N}{2} + m\right) \left(\frac{N}{2} - m + 1\right) + \left(\frac{N}{2} + m'\right) \left(\frac{N}{2} - m' + 1\right) \right) |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|.\end{aligned}$$

Damit ist schließlich auch  $\mathcal{B}_5$  nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl.

Da nun

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_5$$

gilt, so folgt direkt, daß  $\mathcal{B}$  nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist.

**Hilfssatz 2:** Sei  $\mathcal{A}$  wie in Hilfssatz 1 definiert. Dann folgt, daß

$$\mathcal{B}^{(n)} = \mathcal{L}^n \mathcal{A} \text{ mit } n = 1, 2, 3 \dots$$

nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist.

**Beweis:**

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist bereits mit Hilfssatz 1 bewiesen. Es bleibt nur noch der Induktionsschluß zu zeigen.

Sei  $\mathcal{B}^{(n)}$  eine Matrix, die nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist.  $\mathcal{B}$  läßt sich darstellen als:

$$\mathcal{B}^{(n)} = \sum_{n_b, n_a, m} \sum_{n'_b, n'_a, m'} b^{(n)}(n_b, n_a, m; n'_b, n'_a, m') |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|,$$

wobei nach der Induktionsannahme nur Summanden mit  $n_b + n_a + m \neq n'_b + n'_a + m'$  auftreten. Dann folgt:

$$\mathcal{B}^{(n+1)} = \sum_{n_b, n_a, m} \sum_{n'_b, n'_a, m'} b^{(n)}(n_b, n_a, m; n'_b, n'_a, m') (\mathcal{L} |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|).$$

Da  $\mathcal{L} |n_b, n_a, m\rangle \langle n'_b, n'_a, m'|$  nach Hilfssatz 1 nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist, wenn  $n_b + n_a + m \neq n'_b + n'_a + m'$  gilt, so folgt direkt, daß  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist, wenn dies für  $\mathcal{B}^{(n)}$  gilt. Der Hilfssatz 2 ist damit bewiesen.

Nun kann leicht gezeigt werden, daß  $\rho_{n_b, n'_b}(t)$  für  $n_b \neq n'_b$  in nullter Ordnung im Testfeld nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\rho_{n_b, n'_b}(t) &= e^{\mathcal{L}t} \rho_{n_b, n'_b}(t=0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathcal{L}t)^n \rho_{n_b, n'_b}(t=0).\end{aligned}$$

Da nach (4.52)  $\rho_{n_b, n'_b}(t = 0)$  für  $n_b \neq n'_b$  nichtdiagonal bezüglich der Anregungszahl ist, so gilt dies nach Hilfssatz 2 auch für alle Zeiten  $t$  für  $\rho_{n_b, n'_b}(t)$ . Da  $J_3$  seinerseits die Anregungszahl erhält, so folgt damit direkt die zu beweisende Aussage (4.53).

# Anhang D

## Dichtematrixgleichungen für störsstellengebundene Exzitonen mit Dissipation

Für die Inversion  $\langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b}$  und die daran gekoppelten Größen folgt nach der Entkopplung folgendes abgeschlossene System von Bewegungsgleichungen. (Die Abkürzungen aus (4.57) werden hier ebenfalls verwendet.)

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} &= g \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} - \gamma_r \left( \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} + \frac{1}{2} \right) \\
\partial_t \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} &= -\Delta_{\nu} \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} - \kappa \langle \chi_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} - \frac{\gamma_c + \gamma_r}{2} \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle p_{\nu'}^{(+)} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} &= \Delta_{\nu} \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} - 4g \langle a^{\dagger} a \rangle_{n_b} \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} - 2g \left( \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \kappa \langle \chi_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} - \frac{\gamma_c + \gamma_r}{2} \langle p_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle p_{\nu'}^{(-)} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle \chi_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} &= -(\Delta_{\nu} - \Delta_c) \langle \chi_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} + 2g \langle \pi^{(-)} \rangle_{n_b} \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
&\quad - \frac{\gamma_r}{2} \langle \chi_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \chi_{\nu'}^{(+)} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle \chi_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} &= (\Delta_{\nu} - \Delta_c) \langle \chi_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} - 2g \langle \pi^{(+)} \rangle_{n_b} \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
&\quad - \frac{\gamma_r}{2} \langle \chi_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} + \gamma_r \sum_{\nu' \neq \nu} \langle \chi_{\nu'}^{(-)} \rangle_{n_b} \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle \pi^{(+)} \rangle_{n_b} &= \Delta_c \langle \pi^{(-)} \rangle_{n_b} - g \sum_{\nu} \langle \chi_{\nu}^{(-)} \rangle_{n_b} - \frac{\gamma_c}{2} \langle \pi^{(+)} \rangle_{n_b} - 2\kappa n_b \\
\partial_t \langle \pi^{(-)} \rangle_{n_b} &= -\Delta_c \langle \pi^{(+)} \rangle_{n_b} + g \sum_{\nu} \langle \chi_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} - \frac{\gamma_c}{2} \langle \pi^{(-)} \rangle_{n_b} \\
\partial_t \langle a^{\dagger} a \rangle_{n_b} &= -g \sum_{\nu} \langle p_{\nu}^{(+)} \rangle_{n_b} - \gamma_c \langle a^{\dagger} a \rangle_{n_b} - \kappa \langle \pi^{(+)} \rangle_{n_b}.
\end{aligned}$$

In den Dichtematrixgleichungen für die testinduzierte Polarisation (4.60) werden die Matrizen  $\mathbf{M}_\nu$ ,  $\mathbf{L}_{\nu,1}(t)$  und  $\mathbf{L}_{\nu,2}(t)$  gegeben durch:

$$\mathbf{M}_n = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -\Delta_\nu + i\frac{\gamma_r}{2} & 2g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{g}{2} & -\frac{\gamma_c + 2\gamma_r}{2} & -g & i\kappa & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2g & \Delta_\nu + i\frac{2\gamma_c + \gamma_r}{2} & 0 & i2\kappa & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\Delta_c + i\gamma_r & -g & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -g & \Delta_\nu - \Delta_c + i\frac{\gamma_c + \gamma_r}{2} & i\kappa \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\Delta_c + \Delta_\nu + i\frac{\gamma_r}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{L}_{\nu,1}(t) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_1(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2g\langle a^\dagger a \rangle_{n_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_2(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2g\langle a^\dagger a \rangle_{n_b} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2g\langle a^\dagger b \rangle_{n_b} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= g\langle a^\dagger a \rangle_{n_b} + i\frac{\gamma_r}{2} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle a J_{\nu',+} \rangle_{n_b} \\ c_2(t) &= g\langle a^\dagger b \rangle_{n_b} + i\frac{\gamma_r}{2} \sum_{\nu' \neq \nu} \langle b J_{\nu',+} \rangle_{n_b} \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{\nu,2}(t) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -i\gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -g\langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} + i\frac{\gamma_r}{2} \langle a J_{\nu,+} \rangle_{n_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2g\langle a J_{\nu,+} \rangle_{n_b} & 0 & -i\gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} & 0 & 0 & 0 \\ \hline i\frac{\gamma_r}{2} \langle b J_{\nu,+} \rangle_{n_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -g\langle b J_{\nu,+} \rangle_{n_b} & 0 & 0 & 0 & -i\gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\gamma_r \langle J_{\nu,3} \rangle_{n_b} \\ \hline \end{array}$$

Die Vektoren  $\boldsymbol{v}_1$ ,  $\boldsymbol{v}_2$  und  $\boldsymbol{I}_\nu(t)$  werden gegeben durch:

$\boldsymbol{v}_1 =$ 

0
$i\frac{\gamma_r}{2}$
$-g$
0
0
0

$\boldsymbol{v}_2 =$ 

0
0
0
$i\frac{\gamma_r}{2}$
$-\frac{g}{2}$
0

$\boldsymbol{I}_\nu(t) =$ 

$-2\langle J_{\nu,3}\rangle_{n_b}$
$\langle aJ_{\nu,+}\rangle_{n_b}$
0
$\langle bJ_{\nu,+}\rangle_{n_b}$
0
0



# Literaturverzeichnis

- [1] M. Planck. *Verh. Dt. Phys. Ges.*, 2:202 und 237, 1900.
- [2] A. Einstein. *Annln. Phys.*, 17:132, 1905.
- [3] P. A. M. Dirac. *Phys. Roy. Soc. A*, 114:243, 1927.
- [4] E. Fermi. *Rev. Mod. Phys.*, 4:87, 1932.
- [5] V. Weisskopf and E. Wigner. *Z. Phys.*, 4:87, 1932.
- [6] W. E. Lamb, Jr. and R. C. Retherford. *Phys. Rev.*, 72:241, 1947.
- [7] M. B. G. Casimir and D. Polder. *Phys. Rev.*, 73:360, 1948.
- [8] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. *Phys. Rev. Lett.*, 39:691, 1977.
- [9] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2409, 1985.
- [10] F. Bloch. *Phys. Rev.*, 70:460, 1946.
- [11] S. L. McCall and E. L. Hahn. *Phys. Rev. Lett.*, 18:908, 1967.
- [12] M. Lindberg and S. W. Koch. *Phys. Rev. B*, 38:3342, 1988.
- [13] D. Meschede, H. Walther, and G. Müller. *Phys. Rev. Lett.*, 54:551, 1984.
- [14] C. Hood, M. S. Chapman, T. W. Lynn, and H. J. Kimble. *Phys. Rev. Lett.*, 80:4157, 1998.
- [15] M. Pelton and Y. Yamamoto. *Phys. Rev. A*, 59:2418, 1999.
- [16] F. Quochi, G. Bongiovanni, A. Mura, J. L. Stahli, B. Deveaud, R. P. Stanley, U. Oesterle, and R. Houdre. *Phys. Rev. Lett.*, 80:4733, 1998.
- [17] S. H. Autler and C. H. Townes. *Phys. Rev.*, 100:703, 1955.
- [18] T. Hänsch, R. Keil, A. Schabert, Ch. Schmelzer, and P. E. Toschek. *Z. Phys.*, 1969:293, 1969.

- [19] Ph. Tamarat, B. Lounis, J. Bernard, S. Kummer, R. Kettner, S. Mais, Th. Basché. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1514, 1995.
- [20] P. F. Liao and J. E. Bjorkholm. *Phys. Rev. Lett.*, 34:1, 1975.
- [21] N. Peyghambarian, S. W. Koch, M. Lindberg, B. Fluegel , and M. Joffre. *Phys. Rev. Lett.*, 62:1185, 1989.
- [22] F. Y. Wu, S. Ezekiel, M. Ducloy, and B. R. Mollow. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1073, 1977.
- [23] D. Fröhlich, A. Nöthe, K. Reimann. *Phys. Rev. Lett.*, 55:1335, 1985.
- [24] A. Mysrowicz, D. Hulin, A. Antonetti, A. Migus, W. T. Masselink, H. Moroc. *Phys. Rev. Lett.*, 56:274, 1986.
- [25] J.-P. Likforman, M. Joffre, and D. Hulin. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3716, 1997.
- [26] S. Schmitt-Rink, D. S. Chemla, H. Haug. *Phys. Rev. B*, 37:941, 1988.
- [27] R. Zimmermann. *Festkörperprobleme (Advances in Solid State Physics)*, volume 39, page 295. 1990.
- [28] M. Combescot. *Phys. Rep.*, 221:167, 1992.
- [29] D. Hulin and M. Joffre. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3425, 1990.
- [30] D. G. Thomas, J. J. Hopfield. *Phys. Rev.*, 128:2135, 1962.
- [31] B. Lummer, R. Heitz, V. Kutzer, J.-M. Wagner, A. Hoffmann, and I. Broser. *phys. stat. sol. (b)*, 188:493, 1995.
- [32] C. H. Henry and K. Nassau. *Phys. Rev. B*, 1:1628, 1970.
- [33] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions*. Wiley, New York, 1992.
- [34] P. Meystre, M. Sargent. *Element of Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1991.
- [35] S. M. Dutra, P. L. Knight, and H. Moya-Cesa. *Phys. Rev. A*, 49:1993, 1994.
- [36] G. D. Mahan. *Many Particle Physics*. Plenum Press, New York, 1991.
- [37] D. F. Walls, G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1994.
- [38] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [39] D. F. Walls. *Nature*, 306:141, 1983.

- [40] R. Loudon and P. L. Knight. *J. Mod. Opt.*, 34:709, 1987.
- [41] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, and H. Wu. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2520, 1986.
- [42] H. A. Bachor, P. J. Mason. *J. Mod. Opt.*, 37:1727, 1990.
- [43] T. M. Niebaum, A. Rüdiger, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Danzmann. *Phys. Rev. D*, 47:3106, 1993.
- [44] R. J. Glauber. *Phys. Rev.*, 130:2529, 1963.
- [45] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 1983.
- [46] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Oxford University Press, 1995.
- [47] W. Vogel and D. G. Welsch. *Lectures on Quantum Optics*. Akademie Verlag Berlin, 1994.
- [48] E. M. Daly, A. S. Bell, E. Riss, and A. I. Ferguson. *Phys. Rev. A*, 57:3127, 1998.
- [49] P. Kurz, R. Paschotta, K. Fiedler, J. Mlynek. *Europhys. Lett.*, 24:449, 1993.
- [50] D. T. Smithey, M. Beck, M. Raymer, A. Faridani. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1244, 1993.
- [51] K. Vogel and H. Risken. *Phys. Rev. A*, 40:2847, 1989.
- [52] S. Schiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira, T. Müller, and J. Mlynek. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2933, 1996.
- [53] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. *Proc. IEEE*, 51:89, 1963.
- [54] B. W. Shore and P. L. Knight. *J. Mod. Opt.*, 40:1195, 1993.
- [55] R. H. Dicke. *Phys. Rev.*, 93:99, 1954.
- [56] M. U. Wehner, M. H. Ulm, D. S. Chemla, and M. Wegener. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1992, 1998.
- [57] H. Castella and R. Zimmermann. *Phys. Rev. B*, 59:R7801, 1999.
- [58] M. S. Zubairy. *Phys. Lett. A*, 222:91, 1996.
- [59] M. S. Zubairy. *Phys. Rev. A*, 57:2066, 1998.
- [60] B. R. Mollow. *Phys. Rev.*, 188:1969, 1969.

- [61] F. Y. Wu, R. E. Grove, and S. Ezekiel. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1426, 1975.
- [62] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4887, 1996.
- [63] V. Sandoghar, F. Treussart, J. Hare, V. Lefevre-Seguin, J. M. Raimond, and S. Haroche. *Phys. Rev. A*, 54:1777, 1996.
- [64] D. W. Vernooy, A. Furusawa, N. Ph. Geordias, V. S. Ilchenko, and H. J. Kimble. *Phys. Rev. A*, 57:2293, 1998.
- [65] J. M. Gerard, B. Sermage, B. Gayral, B. Legrand, E. Costard, and V. Thierry-Mieg. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1110, 1998.
- [66] M. Abramowitz, and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1972.
- [67] H.-I. Yoo, J. J. Sanchez-Mondragon, and J. H. Eberly. *J. Phys. A*, 14:1383, 1981.
- [68] H. Haug, S. W. Koch. *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*. World Scientific, 1994.
- [69] K. W. Böer. *Survey in Semiconductor Physics*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [70] M. A. Lampert. *Phys. Rev. Lett.*, 1:450, 1958.
- [71] J. R. Haynes. *Phys. Rev. Lett.*, 4:361, 1960.
- [72] I. Broser, B. Lummer, R. Heitz, A. Hoffmann. *J. of Chrystal Growth*, 138:809, 1994.
- [73] B. Lummer, J.-M. Wagner, R. Heitz, A. Hoffmann, I. Broser, and R. Zimmermann. *Phys. Rev. B*, 54:16727, 1996.
- [74] M. Jütte, H. Stolz, and W. von der Osten. *J. Opt. Soc. Am. B*, 13:1205, 1996.
- [75] H. J. Carmichael. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2273, 1993.
- [76] C. W. Gardiner. *Phys. Rev. Lett.*, 79:2269, 1993.
- [77] M. G. Raizen, R. J. Thompson, R. J. Brecha, H. J. Kimble, and H. J. Carmichael. *Phys. Rev. Lett.*, 63:240, 1989.
- [78] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y Arakawa. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3314, 1992.

# Aufstellung der eigenen wissenschaftlichen Veröffentlichungen:

## Zeitschriftenartikel im Rahmen der Dissertation

1. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
Phys. Rev. A. **56**, 1592 (1997).  
*Photon statistics and optical Stark effect*
2. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
Journ. of Phys. B **30**, 3305 (1997).  
*Optical Stark effect and photon statistics in the density matrix approach*
3. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
phys. stat. sol. (b) **206**, 87 (1998).  
*Optical Stark effect of bound excitons with quantized radiation field*
4. T. Altevogt and R. Zimmermann,  
Journ. of Phys. B **32**, 4719 (1999).  
*Nonclassical gain in the optical Stark effect: Density matrix approach*
5. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
to appear in the conference proceedings of the 6th ICSSUR (1999).  
*The optical Stark effect with squeezed radiation field.*

## Tagungsbeiträge im Rahmen der Dissertation:

1. T. Altevogt, H. Puff und R. Zimmermann,  
DPG-Frühjahrstagung, Münster, 17.-21.3.1997.  
*Photonenstatistik im optischen Stark-Effekt*
2. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
NOEKS-5, Graal-Müritz, 1.9.-5.9.1997.  
*Optical Stark effect of bound excitons with quantized radiation field*
3. T. Altevogt, H. Puff und R. Zimmermann,  
DPG-Frühjahrstagung, Regensburg, 23.3.-27.3.1998.  
*Der optische Stark-Effekt mit gequetschtem Strahlungsfeld*
4. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
International Summerschool on QED Phenomena and  
Applications of Microcavities and Photonic Crystals,  
Cargèse, Frankreich, 3.8.-15.8.1998.  
*The optical Stark effect on bound excitons with squeezed radiation field*

5. T. Altevogt, H. Puff, and R. Zimmermann,  
International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations  
(ICSSUR 1999)  
Neapel, Italien, 24.-29.5.1999.  
*The optical Stark effect with squeezed radiation field*

**Weitere Veröffentlichungen im Rahmen der Diplomarbeit:**

1. Y. Stalgies, I. Siemers, B. Appasamy, T. Altevogt, and P. E. Toschek,  
*The spectrum of single-atom resonance fluorescence*  
Europhys. Lett. **35**, 259 (1996).
2. T. Altevogt, Y. Stalgies, J. Eschner, B. Appasamy, I. Siemers, P. E. Toschek,  
*Quantisierte optische Tripelresonanz am einzelnen Barium-Ion*  
DPG-Frühjahrstagung, 15.3.-19.3.1996, Jena.
3. T. Altevogt,  
*Quantisierte optische Tripelresonanz am einzelnen Barium-Ion*  
Diplomarbeit, Universität Hamburg (1995).

Berlin, den 2.11.1999

(Torsten Altevogt)



# Lebenslauf

## Persönliches:

- *Name:* Torsten Altevogt
- *Nationalität:* deutsch
- *Geboren:* 14. Dezember 1968 in Osnabrück
- *Familienstand:* ledig

## Ausbildung:

- *1980 -1988:*  
Kardinal-von-Galen-Gymnasium, Mettingen;  
Schulabschluß: Abitur
- *Juli 1988 - Okt. 1989:*  
Wehrdienst
- *Okt. 1989 - Okt. 1993:*  
Physikstudium an der Universität Hannover;  
Vordiplom im Oktober 1991
- *Okt. 1993 - Nov. 1995:*  
Fortsetzung des Physikstudiums an der Universität Hamburg;  
Diplomarbeit am Institut für Laserphysik zum Thema:  
*Quantisierte Tripelresonanz eines einzelnen Barium-Ions*  
unter Betreuung von Prof. P. E. Toschek;  
Diplomabschluß im November 1995 (mit ausgezeichnet)
- *Feb. 1996 - Nov. 1999:*  
Promotion an der Humboldt-Universität zu Berlin  
*Der optische Stark-Effekt mit quantisiertem Strahlungsfeld*  
unter Betreuung von Prof. Dr. R. Zimmermann und Dr. H. Puff

Berlin, den 2.11.1999

(Torsten Altevogt)



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich den geduldigen Leser, der bis hierhin vorgedrungen ist, auf die Personen aufmerksam machen, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Zimmermann und Herrn Dr. Puff für viele Hinweise, Gespräche und Diskussionen bedanken, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit geführt haben.

Herrn Dr. Puff möchte ich weiter besonders auch dafür danken, daß er mich stets auf interessante Entwicklungen in der Physik aufmerksam gemacht hat. Herr Prof. Zimmermann hat mir insbesondere sehr viele Möglichkeiten gegeben, meine Ergebnisse publik zu machen. Besonders bedanke ich mich für die Chance an einer internatinalen Sommerschule und an einer internationalen Tagung in Neapel teilnehmen zu können.

Dann möchte ich mich vor allem bei allen Kollegen bedanken, die dafür gesorgt haben, daß ich mich hier in der Gruppe ausgesprochen wohl gefühlt habe, besonders bei Erich Runge, Youssef Dhaibi, Anastasios Siarkos, Axel Esser und natürlich auch allen anderen.

Bei Frau Heider möchte ich mich besonders für die gute Organisation der Weihnachtsfeiern, der Geburtstagsfeiern und die Einladungen zum Zeuthener See bedanken. Ich denke, daß gerade diese Dinge ganz entscheidend zu meinem Wohlbefinden in der Gruppe beigetragen haben.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei allen Freunden und Verwandten bedanken, die mich während nicht ganz einfachen Phasen nicht hängen gelassen haben, besonders bei meiner Mutter und ganz besonders bei Sandra.

# Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt zu haben und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

2. November 1999

Torsten Altevogt